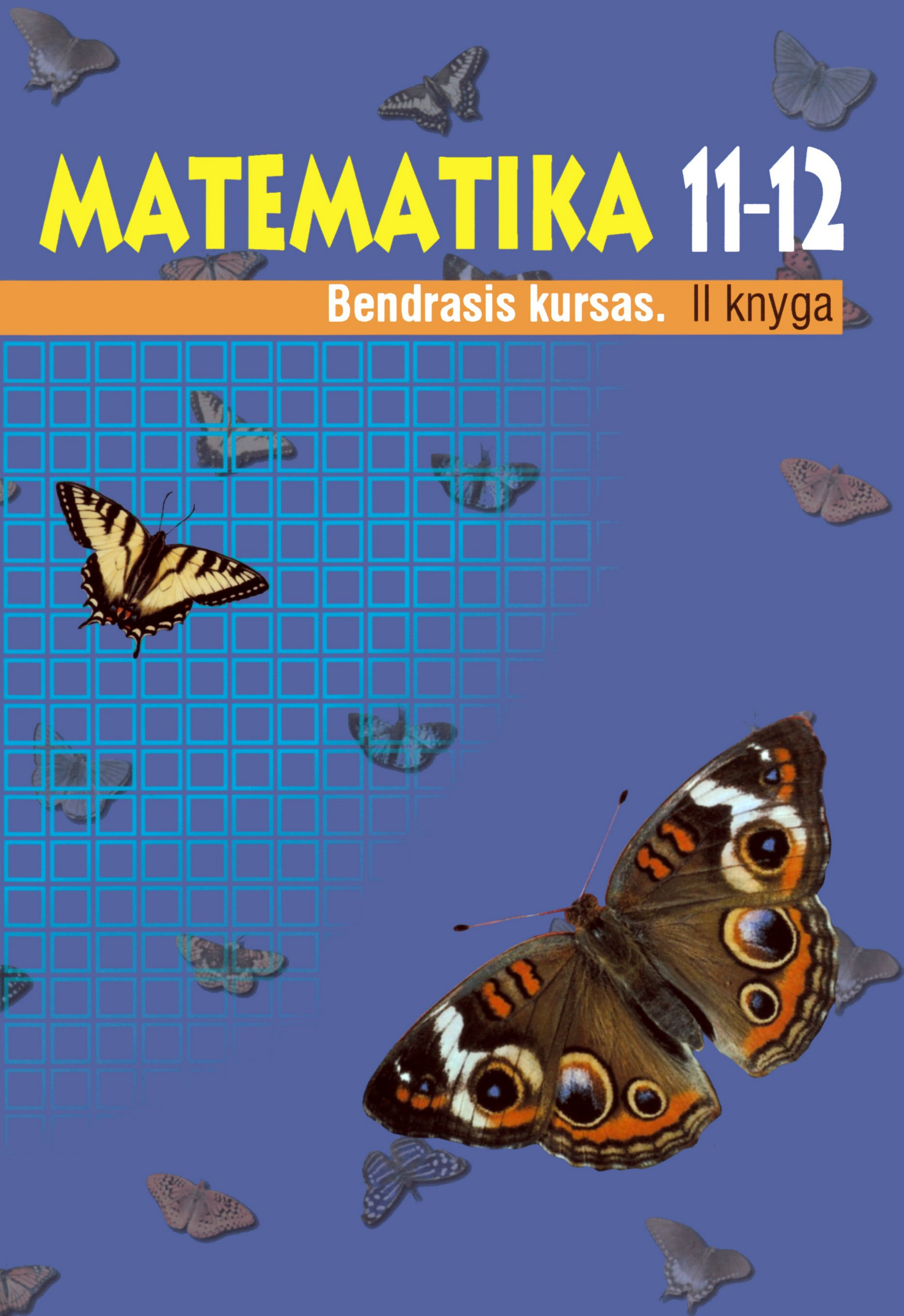

MATEMATIKA 11-12
Bendrasis kursas. II knyga

MATEMATIKA 11-12

BENDRASIS KURSAS

2 KNYGA

TEV
VILNIUS 2008

LEIDĖJŲ ŽODIS

Šis vadovėlis skirtas XI–XII klasių mokiniams, pasirinkusiems bendrąjį matematikos kursą. Juo galės naudotis tie, kurie neplanuoja laikyti jokio matematikos egzamino arba rengiasi laikyti mokyklinį matematikos egzaminą.

Vadovėlyje nagrinėjamos temos yra sudėtinė išplėstinio matematikos kurso dalis, todėl kaip mokomoji priemonė jis gali būti naudingas ir tiems, kurie laikys valstybinį matematikos egzaminą, tačiau jaučiasi silpnesni. Mat šiame vadovėlyje medžiaga dėstoma daug paprasčiau ir suprantamiau nei leidyklos TEV išleistuose išplėstinio matematikos kurso vadovėliuose „Matematika 11“ ir „Matematika 12“.

Vadovėlį sudaro dvi knygos, suskirstytos į 4 dalis, atitinkančias naująsias programas ir standartus: *Realieji skaičiai ir algebra*, *Funkcijos, lygtys ir nelygybės*, *Diferencialinis skaičiavimas*, *Tikimybės ir statistika*.

Išplėstinio kurso temos — planimetrija, stereometrija, vektoriai, integralinis skaičiavimas — šiame vadovėlyje nenagrinėjamos. Tačiau planimetriją ir stereometriją, kurių prireiks laikant mokyklinį egzaminą, galima prisiminti sprendžiant vadovėlyje pateikiamus uždavinius.

Nuoširdžiai dėkojame visiems, prisidėjusiems rengiant šį vadovėlį.

UDK 51(075.3)
Kn42

Lietuvos Respublikos švietimo ir mokslo ministerijos rekomenduota 2005 03 16 Nr. 47

Valstybinės lietuvių kalbos komisijos 2005 m. vasario 23 d. sprendimu vadovėlis atitinka kalbos taisyklingumo reikalavimus

Vadovėlį rengė:
Jolanta Knyvienė, Milda Vosylienė, Valdas Vanagas

Recenzavo Matematikos ir informatikos institutas

Darbo vadovas *Valdas Vanagas*

Redaktoriai: *Juozas Mačys, Žydrūnė Stundžienė*

Programinė įranga: *Tadeuš Šeibak*

Kompiuterinė grafika: *Edita Tatarinavičiūtė, Inga Paukštienė, Daiva Sniečkutė*

Tekstą rinko ir maketavo: *Laimutė Ališauskienė, Nijolė Drazdauskienė*

Kalbos redaktorė *Diana Gustienė*

Konsultantas *Elmundas Žalys*

Leidyklos TEV interneto svetainė www.tev.lt

ISBN 9955–680–04–0

KAIP NAUDOTIS VADOVĖLIU

Vadovėlį sudaro dvi knygos, kurių struktūra vienoda — medžiaga suskirstyta į dalis, o šios — į skyrius ir skyrelius.

Kiekvieno skyriaus pradžioje pateikiamas jo turinys. Kiekviename skyrelyje glaustai išdėstoma teorija. Paraštėje klaustuku ? pažymėti nebaigti spręsti pavyzdžiai ir pamąstymui suformuluoti klausimai. Skyrelio pabaigoje pateikiami ją iliustruojantys pratimai ir uždaviniai. Čia rasite daugybę išspręstų pavyzdžių, nurodymų ir patarimų, kaip spręsti, formulių ir priminimų. Visi jie pažymėti ženkleliu ?!.

Kiekvieno skyriaus pabaigoje yra du uždavinių skyreliai — *Geometrijos uždaviniai* ir *Pasitikrinkime*. Pirmasis skirtas geometrijos kursui prisiminti, o antrasis — išsiaiškinti, kaip pavyko nagrinėtus dalykus suprasti ir įsiminti. Skyrelio *Pasitikrinkime* uždavinių atsakymus rasite knygos pabaigoje.

Uždaviniai parinkti taip, kad apimtų ne tik vidurinės, bet ir pagrindinės mokyklos kursą. Todėl stipresniesiems mokiniams su lengvais uždaviniais galima ir negaišti. Šiek tiek sunkesnių uždavinių numeriai yra nuspalvinti.

Prieš kiekvieno skyriaus turinį yra įdomybėms skirti puslapiai. Jie šiek tiek siejasi su toliau ar prieš tai esančiu skyriumi. Manome, kad ne tik tie puslapiai, bet ir visas vadovėlis turėtų paskatinti mokinius domėtis matematika.

TURINYS

1, 2, 3, 4, ...

Galima prigalvoti įvairių skaitinių reiškinių, kurių reikšmės lygios natūraliesiems skaičiams: 1, 2, 3, 4, ... Pavyzdžiui: $1 = 4 - 3$, $2 = 4 - 2$, $3 = 4 - 1$, $4 = 4 - 0$, ... Natūraliuosius skaičius galima užrašyti ir logaritminiais reiškiniais.

Dvejeto galia

$$-\log_2 \log_2 \sqrt{2} = 1$$

$$-\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{2}} = 2$$

$$-\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} = 3$$

$$-\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}} = 4$$

....

Trejeto galia

$$-\log_3 \log_3 \sqrt[3]{3} = 1$$

$$-\log_3 \log_3 \sqrt[3]{\sqrt[3]{3}} = 2$$

$$-\log_3 \log_3 \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}} = 3$$

$$-\log_3 \log_3 \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}}} = 4$$

....

Ketverto galia

$$-\log_4 \log_4 \sqrt[4]{4} = 1$$

$$-\log_4 \log_4 \sqrt[4]{\sqrt[4]{4}} = 2$$

$$-\log_4 \log_4 \sqrt[4]{\sqrt[4]{\sqrt[4]{4}}} = 3$$

$$-\log_4 \log_4 \sqrt[4]{\sqrt[4]{\sqrt[4]{\sqrt[4]{4}}}} = 4$$

....

8 LOGARITMINĖ FUNKCIJA

8.1. Logaritmas

Ką vadiname logaritmu?

Prisiminkime, ką reiškia toks užrašas:

$$\log_2 8.$$

Skaitome: Logaritmas aštuonių pagrindu du (aštuonių logaritmas pagrindu du).
Suprantame:

$$\log_2 8 = 3, \quad \text{nes} \quad 2^3 = 8.$$

Skaičiaus a logaritmu pagrindu b vadiname skaičių c, kuriuo pakėlę b, gauname a.

$$\log_b a = c, \quad b^c = a$$

Reiškinys $\log_b a$ *laikomas turinčiu prasmę, kai* $a > 0$, $b > 0$, $b \neq 1$.

Raskite logaritmus: $\log_2 2$, $\log_2 4$, $\log_2 16$, $\log_2 32$, $\log_2 \frac{1}{2}$, $\log_2 \frac{1}{4}$, $\log_2 \frac{1}{16}$, $\log_2 \frac{1}{32}$.

Logaritmas vieneto bet kokiu pagrindu lygus nuliui, pvz., $\log_2 1 = 0$, nes $2^0 = 1$.

$$\log_b 1 = 0, \quad b > 0, b \neq 1$$

Kai logaritmo pagrindas yra 10, tai logaritmą vadiname *dešimtainiu*. Dešimtainį logaritmą rašome trumpiau, pvz.,

$$\log_{10} 100 = \lg 100.$$

Skaitome: Dešimtainis logaritmas šimto (šimto dešimtainis logaritmas).

Raskite dešimtainius logaritmus: $\lg 10$, $\lg 1000$, $\lg 1\,000\,000$, $\lg \frac{1}{10}$, $\lg \frac{1}{100}$, $\lg 1$.

Pagrindinė logaritminė tapatybė

Apskaičiuokime reiškinio

$$2^{\log_2 8}$$

reikšmę. Kadangi $\log_2 8 = 3$, tai $2^{\log_2 8} = 2^3 = 8$. Vadinasi,

$$2^{\log_2 8} = 8.$$

Apskaičiuokite: $3^{\log_3 81}$, $4^{\log_4 64}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 16}$, $10^{\lg 100}$.

Su visomis $a > 0$, $b > 0$, $b \neq 1$ *reikšmėmis teisinga tokia lygybė:*

$$b^{\log_b a} = a$$

Ši lygybė vadinama pagrindine logaritmine tapatybe.

Pratimai ir uždaviniai

1. Perskaitykite surašytus logaritmus ir apskaičiuokite jų reikšmes.

a) $\log_3 27$, $\log_3 9$, $\log_3 3$, $\log_3 1$, $\log_3 \frac{1}{3}$, $\log_3 \frac{1}{9}$, $\log_3 \frac{1}{27}$;

b) $\log_{\frac{1}{3}} 3$, $\log_{\frac{1}{3}} 27$, $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}$, $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81}$, $\log_{\frac{1}{3}} 1$, $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}$, $\log_{\frac{1}{3}} 9$.

2. Pabaikite pildyti lentelę ir koordinačių plokštumoje pažymėkite taškus, kurių koordinatės yra $(x; y)$.

a) $\log_2 x = y$

$x =$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y =$	-2				2	

b) $\log_3 x = y$

$x =$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
$y =$		-1		1	

c) $\log_{\frac{1}{2}} x = y$

$x =$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y =$					-2	

d) $\log_{\frac{1}{3}} x = y$

$x =$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
$y =$			0		

3. Perskaitykite surašytus dešimtainius logaritmus ir apskaičiuokite jų reikšmes.

a) $\lg 1$, $\lg 10$, $\lg 100$, $\lg 10\,000$, $\lg 1\,000\,000\,000$;

b) $\lg \frac{1}{1000}$, $\lg \frac{1}{10\,000}$, $\lg \frac{1}{1\,000\,000}$.

4. Skaičiokliu apskaičiuokite ir suapvalinkite iki šimtųjų surašytų logaritmų reikšmes.

a) $\log_2 5$, $\log_2 7$, $\log_2 12$; b) $\log_3 0{,}5$, $\log_3 0{,}3$, $\log_3 1{,}2$;

c) $\lg 2$, $\lg 12$, $\lg 105$.

5. 1) Su kuriomis x reikšmėmis turi prasmę logaritmas nurodytu pagrindu:

a) $\log_2 x$? b) $\log_3(x+1)$? c) $\log_{\frac{1}{2}}(-x)$? d) $\lg(x^2)$? e) $\lg\sqrt{x}$?



Logaritmas turi prasmę, kai pologaritminis reiškinys didesnis už nulį.

2) Su kuriomis x reikšmėmis turi prasmę nurodyto skaičiaus logaritmas:

a) $\log_x 3$? b) $\log_{x+1} 1$? c) $\log_{-x} 5$? d) $\log_{x^2} \frac{1}{2}$? e) $\log_{\sqrt{x}} \frac{1}{9}$?



Logaritmo pagrindas turi būti didesnis už nulį ir nelygus vienetui.

6. Raskite logaritmo apibrėžimo sritį.

a) $\log_{x+2} x$; b) $\log_{3-2x}(x^2-1)$; c) $\log_{3x-x^2}(x^2+2x-8)$.

7. Apskaičiuokite reiškinio reikšmę.

a) $2 \cdot \log_5 25 + 3 \cdot \log_4 \frac{1}{16}$;

b) $\log_{\sqrt{2}} 2 - \log_2 \sqrt{2}$;

c) $3^{\log_3 3} \cdot 5^{\log_5 1}$;

d) $7^{\log_7 5} : \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{0,5} 25}$.

8.2. Funkcija $f(x) = \log_a x$

Funkcija $f(x) = \log_a x$, $a > 1$

Nagrinėkime funkciją

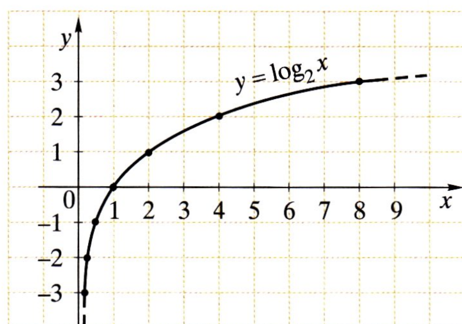
$$f(x) = \log_2 x.$$

1) Logaritmas turi prasmę, kai pologaritminis reiškinys yra didesnis už 0. Todėl funkcijos $f(x) = \log_2 x$ *apibrėžimo sritį* sudaro teigiamieji skaičiai ($x > 0$), t. y.:

$$D_f = (0; +\infty).$$

2) Sudarykime funkcijos $f(x) = \log_2 x$ reikšmių lentelę ir nubraižykime jos *grafiką*:

$x =$	...	$\frac{1}{8}$	...	$\frac{1}{4}$	...	$\frac{1}{2}$	...	1	...	2	...	4	...	8	...
$\log_2 x =$		-3		-2		-1		0		1		2		3	



Su kuriomis x reikšmėmis funkcija $f(x) = \log_2 x$ įgyja teigiamas reikšmes? su kuriomis — neigiamas? su kuria x reikšme $f(x) = 0$?

3) Iš lentelės ir grafiko matome, kad funkcijos $f(x) = \log_2 x$ *reikšmių sritį* sudaro visi skaičiai ($y \in \boldsymbol{R}$), t. y.:

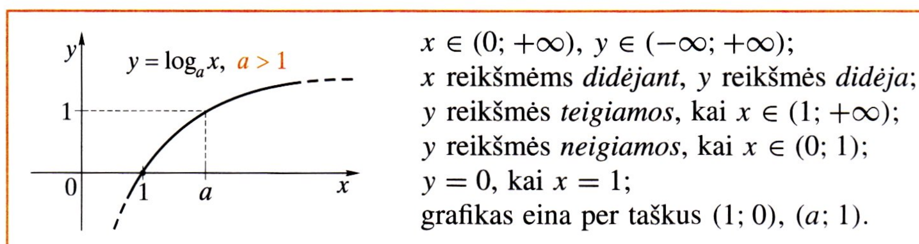
$$E_f = (-\infty; +\infty).$$

4) Didėjant x reikšmėms $y = f(x)$ reikšmės irgi didėja (funkcijos grafikas, einant iš kairės į dešinę, kyla į viršų), todėl funkcija yra *didėjanti*.

Tokiomis pačiomis savybėmis pasižymi logaritminės funkcijos

$$f(x) = \log_a x,$$

kai logaritmo pagrindas a yra ***didesnis*** už 1.



$x \in (0; +\infty)$, $y \in (-\infty; +\infty)$;
x reikšmėms *didėjant*, y reikšmės *didėja*;
y reikšmės *teigiamos*, kai $x \in (1; +\infty)$;
y reikšmės *neigiamos*, kai $x \in (0; 1)$;
$y = 0$, kai $x = 1$;
grafikas eina per taškus $(1; 0)$, $(a; 1)$.

Funkcija $f(x) = \log_a x, 0 < a < 1$

Nagrinėkime logaritminę funkciją, kai pagrindas a mažesnis už 1, pavyzdžiui,

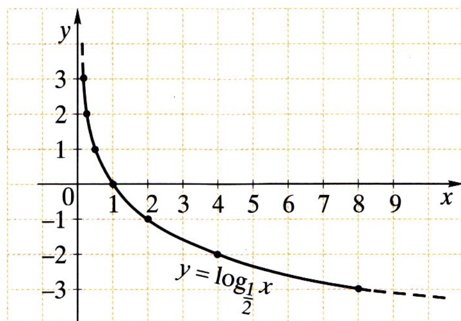
$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x.$$

1) Funkcijos apibrėžimo sritis:

$$D_f = (0; +\infty).$$

2) Funkcijos reikšmių lentelė ir grafikas:

$x =$	...	$\frac{1}{8}$	...	$\frac{1}{4}$	...	$\frac{1}{2}$	...	1	...	2	...	4	...	8	...
$\log_{\frac{1}{2}} x =$		3		2		1		0		−1		−2		−3	



Su kuriomis x reikšmėmis funkcija $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ įgyja teigiamas reikšmes? su kuriomis — neigiamas? su kuria x reikšme $f(x) = 0$?

3) Funkcijos $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ reikšmių sritis:

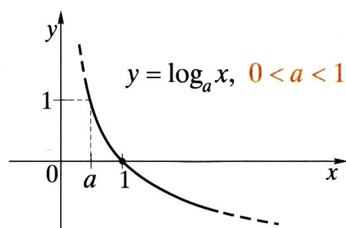
$$E_f = (-\infty; +\infty).$$

4) Funkcija yra mažėjanti.

Tokiomis pačiomis savybėmis pasižymi logaritminės funkcijos

$$f(x) = \log_a x,$$

kai logaritmo pagrindas a yra ***mažesnis*** už 1.



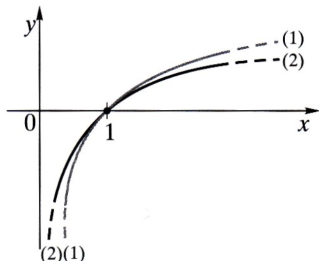
$x \in (0; +\infty)$, $y \in (-\infty; +\infty)$;
x reikšmėms *didėjant*, y reikšmės *mažėja*;
y reikšmės *teigiamos*, kai $x \in (0; 1)$;
y reikšmės *neigiamos*, kai $x \in (1; +\infty)$;
$y = 0$, kai $x = 1$;
grafikas eina per taškus $(1; 0)$, $(a; 1)$.

Pratimai ir uždaviniai

Funkcija $f(x) = \log_a x, a > 1$

8. Nubraižykite funkcijos $y = f(x)$ grafiką ir išvardykite jos savybes.
a) $f(x) = \log_3 x$; b) $f(x) = \lg x$.

9. Toje pačioje koordinačių plokštumoje pavaizduoti funkcijų $f(x) = \log_2 x$ ir $g(x) = \log_3 x$ grafikai:

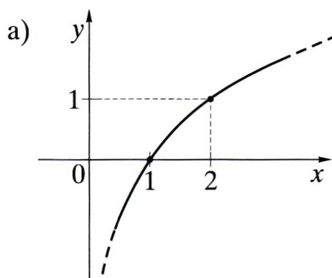


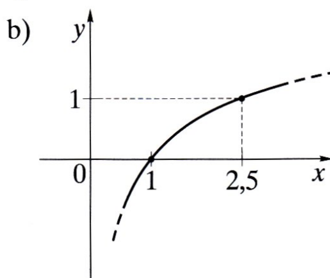
Kuris grafikas kurią funkciją atitinka? Paaiškinkite kodėl.

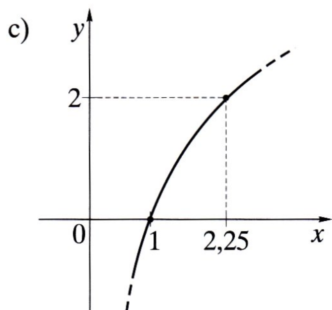
10. Kurie iš taškų $\left(\frac{1}{3}; -1\right)$, $(9; 2)$, $(2; 9)$, $(3; 3)$, $\left(\frac{1}{27}; -3\right)$, $(0; 1)$ priklauso funkcijos $f(x) = \log_3 x$ grafikui?

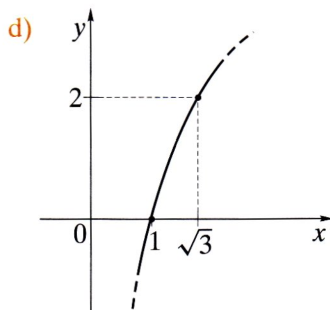
11. Remdamiesi funkcijos $f(x) = \log_2 x$ grafiku, didėjimo tvarka surašykite skaičius: $\log_2 \frac{1}{64}$, $\log_2 64$, $\log_2 \frac{1}{8}$, $\log_2 8$, $\log_2 \frac{1}{23}$, $\log_2 \frac{1}{22}$, $\log_2 23$, $\log_2 22$.

12. Nubraižytas funkcijos $f(x) = \log_a x$ grafikas.

a)


b)


c)


d)


Remdamiesi grafiku, nustatykite logaritmo pagrindo a reikšmę.

13. Raskite funkcijos $f(x)$ apibrėžimo sritį.

a) $f(x) = \log_2(x+5)$; b) $f(x) = \log_2(5-x)$;

c) $f(x) = \log_3(2x-10)$; d) $f(x) = \log_3(10-5x)$;

e) $f(x) = \log_4(x^2)$; f) $f(x) = \log_4(x^3)$;

g) $f(x) = \log_5(x^2+2x)$; h) $f(x) = \log_5(-x^2-x)$;

i) $f(x) = \log_6(x^2-4)$; j) $f(x) = \log_6(x^2+4)$;

k) $f(x) = \log_7(x^2-2x+6)$; l) $f(x) = \log_7(6+x-x^2)$;

m) $f(x) = \lg\left(\frac{2}{x-5}\right)$; n) $f(x) = \lg\frac{5x-1}{5-2x}$.

14. Toje pačioje koordinačių plokštumoje nubraižykite funkcijų $y = f(x)$ ir $y = g(x)$ grafikus.

a) $f(x) = 2^x$, $g(x) = \log_2 x$; b) $f(x) = 3^x$, $g(x) = \log_3 x$.

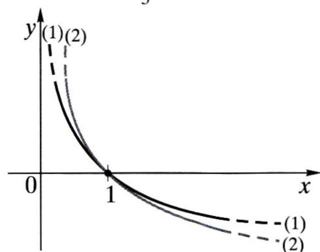
Pasakykite, kokios tiesės atžvilgiu jie yra simetriški.

Funkcija $f(x) = \log_a x, 0 < a < 1$

15. Nubraižykite funkcijos $y = f(x)$ grafiką ir išvardykite jos savybes.

a) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$; b) $f(x) = \log_{0,1} x$.

16. Toje pačioje koordinačių plokštumoje pavaizduoti funkcijų $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ ir $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ grafikai:



Kuris grafikas kurią funkciją atitinka? Paaiškinkite kodėl.

17. Kurie iš taškų $(1; 0)$, $(3; 1)$, $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$, $(3; -1)$, $(9; 2)$, $(9; -2)$ priklauso funkcijos $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ grafikui?

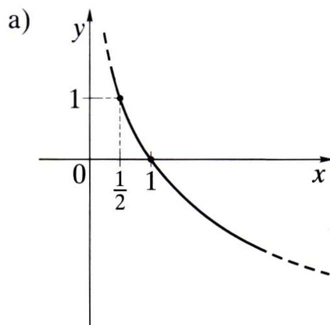
18. Remdamiesi funkcijos $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ grafiku, didėjimo tvarka surašykite skaičius: $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{64}$, $\log_{\frac{1}{2}} 64$, $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$, $\log_{\frac{1}{2}} 8$, $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{23}$, $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{22}$, $\log_{\frac{1}{2}} 23$, $\log_{\frac{1}{2}} 22$.

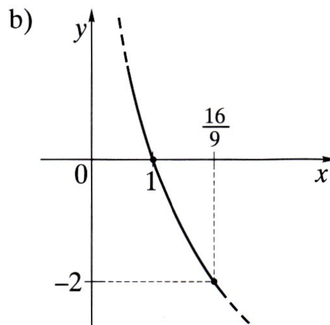
19. Toje pačioje koordinačių plokštumoje nubraižykite funkcijų $y = f(x)$ ir $y = g(x)$ grafikus.

a) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$; b) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$.

Pasakykite, kokios tiesės atžvilgiu jie yra simetriški.

20. Nubraižytas funkcijos $f(x) = \log_a x$ grafikas.

a) 

b) 

Remdamiesi grafiku, nustatykite logaritmo pagrindo a reikšmę.

21. Raskite funkcijos $f(x)$ apibrėžimo sritį.

a) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+2)$;

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(2-x)$;

c) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(5x+8)$;

d) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(8-3x)$;

e) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}}(x^2)$;

f) $f(x) = \log_{\frac{2}{5}}(x^3)$;

g) $f(x) = \log_{\frac{3}{5}}(2x^2+10x)$;

h) $f(x) = \log_{0,7}(5x-2x^2)$;

i) $f(x) = \log_{0,1}(x^2-2x+1)$;

j) $f(x) = \log_{0,3}(x^2-9)$.

Funkcija $f(x) = \log_a x$

22. Toje pačioje koordinačių plokštumoje nubraižykite funkcijų $y = f(x)$ ir $y = g(x)$ grafikus.

a) $f(x) = \log_2 x$, $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$; b) $f(x) = \log_3 x$, $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$.

Pasakykite, kokios tiesės atžvilgiu jie yra simetriški. Paaiškinkite kodėl.

23. Koks ženklas (>, <) turėtų būti parašytas vietoj kvadratėlių:

a) $\log_{\frac{1}{3}} 6$ ■ $\log_{\frac{1}{3}} 2$; $\log_3 6$ ■ $\log_3 2$?

b) $\log_{\frac{1}{2}} 5$ ■ $\log_{\frac{1}{2}} 9$; $\log_2 5$ ■ $\log_2 9$?

c) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{6}$ ■ $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$; $\log_3 \frac{1}{6}$ ■ $\log_3 \frac{1}{2}$?

d) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{2}{5}$ ■ $\log_{\frac{1}{2}} \frac{2}{9}$; $\log_2 \frac{2}{5}$ ■ $\log_2 \frac{2}{9}$?

Pabaikite sakinius.
Jei dviejų logaritmų pagrindai yra vienodi ir:

- didesni už 1, tai didesnis tas logaritmas, kurio ... ;
- mažesni už 1, tai didesnis tas logaritmas, kurio ... .

24. Koks ženklas (> , <) turėtų būti parašytas vietoj kvadratėlio:

1) $\log_a b$ ■ $\log_a c$, jei $a > 1$, $b > c$?

2) $\log_a b$ ■ $\log_a c$, jei $a > 1$, $b < c$?

3) $\log_a b$ ■ $\log_a c$, jei $a < 1$, $b > c$?

4) $\log_a b$ ■ $\log_a c$, jei $a < 1$, $b < c$?

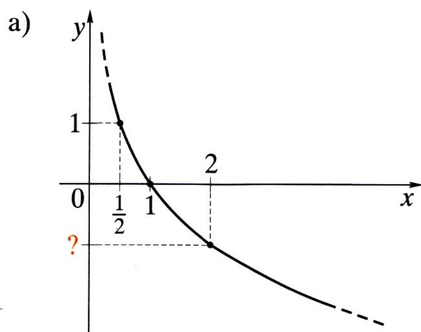
25. Nubraižyti funkcijų

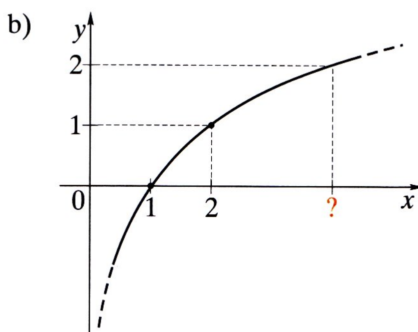
$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x, \quad g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x,$

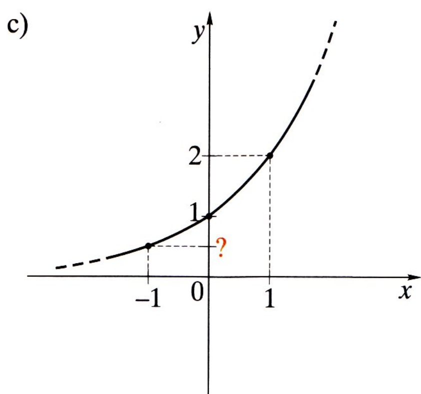
$h(x) = \log_2 x, \quad k(x) = 2^x,$

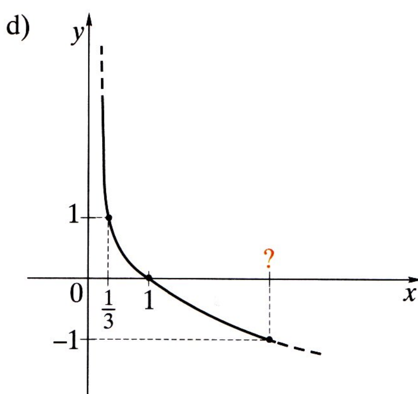
$l(x) = \log_{\frac{1}{3}} x, \quad m(x) = 3^x$

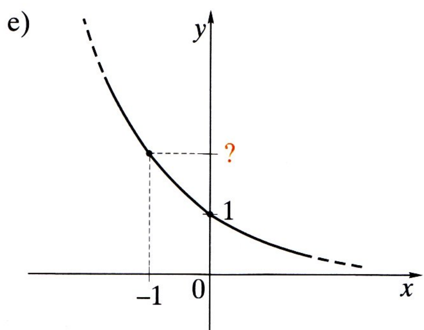
grafikai.

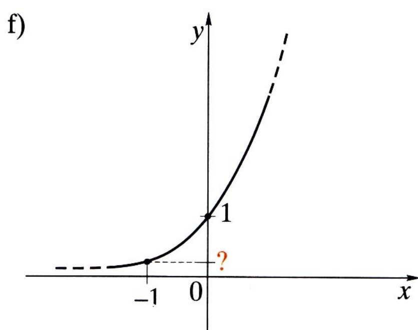
a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

1) Kuris grafikas kurią funkciją atitinka?
2) Kokie skaičiai turėtų būti parašyti vietoj klaustukų?

8.3. Logaritminės lygtys

Žinodami, kam lygus skaičiaus x logaritmas kuriuo nors pagrindu, galime rasti ir patį skaičių x. Pavyzdžiui, jei

$$\log_2 x = 3,$$

tai, remdamiesi logaritmo apibrėžimu, gauname:

$$x = 2^3, \quad x = 8.$$

Galima sakyti, kad išsprendėme lygtį, kurios nežinomasis buvo *pologaritminiame* reiškinyje.

Panašiai spręstume ir lygtį

$$\log_x 8 = 3.$$

Kadangi

$$x^3 = 8, \quad \text{tai} \quad x = \sqrt[3]{8}, \quad x = 2.$$

Šioje lygtyje nežinomasis buvo *logaritmo pagrindo* reiškinyje.

Lygtys, kuriose nežinomasis yra pologaritminiame ar logaritmo pagrindo reiškinyje, vadinamos logaritminėmis.

1 PAVYZDYS. Išspręskime lygtį $\log_3(x-6) = 2$.

Sprendimas. I būdas.

1) Remdamiesi logaritmo apibrėžimu, gauname:

$$\log_3(x-6) = 2, \quad x - 6 = 3^2.$$

2) Išsprendžiame gautą lygtį:

$$x - 6 = 9, \quad x = 15.$$

3) Patikriname, ar $x = 15$ yra lygties sprendinys: $\log_3(15-6) = \log_3 9 = 2$.

Pastaba. Atkreipkite dėmesį, kad lygtis $x - 6 = 3^2$ turi prasmę su visais x, o lygties $\log_3(x-6) = 2$ apibrėžimo sritis yra

$$x - 6 > 0, \quad x > 6.$$

Kitaip sakant, „numesdami“ logaritmą, mes *praplėtėme* lygties apibrėžimo sritį. Todėl ***būtinai reikia patikrinti***, ar gautoji x reikšmė yra duotosios lygties sprendinys!

II būdas. Kairioji lygties $\log_3(x-6) = 2$ pusė yra logaritmas su pagrindu 3. Dešinę lygties pusę pakeiskime logaritmu su pagrindu 3.

Kadangi $2 = \log_3 9$, tai lygtis $\log_3(x-6) = 2$ ekvivalenti lygčiai

$$\log_3(x-6) = \log_3 9.$$

Logaritmai tuo pačiu pagrindu yra lygūs, kai lygūs pologaritminiai reiškiniai, t. y.

$$x - 6 = 9, \quad x = 15.$$

Atsakymas. $x = 15$.

2 PAVYZDYS. Išspręskime lygtį $\log_{x-1} 4 = 2$.

Sprendimas. 1) Remdamiesi logaritmo apibrėžimu, gauname:

$$\log_{x-1} 4 = 2,$$

$$(x-1)^2 = 4.$$

2) Išsprendžiame šią lygtį:

$$x - 1 = -2, \quad x - 1 = 2,$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 3.$$

3) Tikriname, ar gautos x reikšmės yra lygties $\log_{x-1} 4 = 2$ sprendiniai.
Kadangi logaritmo pagrindas $x-1$ turi būti didesnis už 0 ir nelygus 1 (prisiminkite logaritmo apibrėžimą), tai aišku, kad

$$x = -1$$

nėra lygties sprendinys, nes su šia x reikšme logaritmo pagrindas $x - 1$ yra neigiamas: kai $x = -1$, tai $x - 1 = -1 - 1 = -2 < 0$.
Reikšmė

$$x = 3$$

tinka, nes

$$\log_{3-1} 4 = \log_2 4 = 2.$$

Atsakymas. $x = 3$.

Išsprendus logaritminę lygtį, reikia patikrinti, ar rastosios nežinomojo reikšmės tikrai yra lygties sprendiniai. Galima prieš sprendžiant logaritminę lygtį nustatyti jos apibrėžimo sritį, o radus nežinomojo reikšmes, atmesti tas, kurios į šią sritį neįeina.

Logaritminę lygtį $\log_{g(x)} f(x) = c$ (kur nežinomasis yra pologaritminiame reiškinyje arba logaritmo pagrindo reiškinyje, arba abiejuose tuose reiškiniuose) galima spręsti:

- remiantis logaritmo apibrėžimu, t. y. lygybę

  $$\log_{g(x)} f(x) = c \quad (\text{čia } f(x) > 0, g(x) > 0, g(x) \neq 1)$$

  keičiant lygybe

  $$g(x)^c = f(x);$$

- remiantis tuo, kad logaritmai su vienodais pagrindais yra lygūs, kai lygūs jų pologaritminiai reiškiniai:

  $$\log_{g(x)} f(x) = c,$$

  $$\log_{g(x)} f(x) = \log_{g(x)} g(x)^c,$$

  $$f(x) = g(x)^c.$$

Pratimai ir uždaviniai

Lygtys, kuriose nežinomasis yra pologaritminiame reiškinyje

26. Išspręskite lygtis.

a) $\log_4 x = 2$, $\log_4 x = \frac{1}{2}$, $\log_4 x = 1$, $\log_4 x = 0$, $\log_4 x = -2$;
b) $\log_5(x-1) = 3$, $\log_5(x-2) = 0$, $\log_5(2-x) = -1$;
c) $\log_{\frac{1}{2}} x = 2$, $\log_{\frac{1}{2}} x = -2$, $\log_{\frac{1}{2}}(x^2) = 4$, $\log_{\frac{1}{2}}(x^2) = -1$;
d) $\log_3(x^2 + 2x) = 1$, $\log_3(-x^2 + 2x) = 2$;
e) $\lg x = 0$, $\lg(2-x) = 0$, $\lg(x^2) = 0$, $\lg(-x^2 - 2x) = 0$.



Nepamirškite, kad pologaritminis reiškinys turi būti didesnis už 0.

27. Išspręskite lygtį.

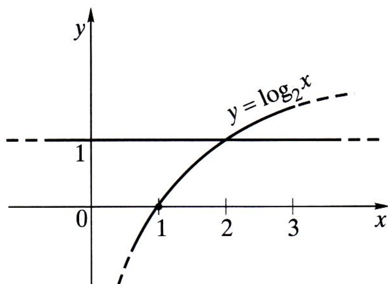
a) $\log_3(x^2) \cdot \log_5(5-x) = 0$;
b) $\log_5 x \cdot \log_2(x+2) = 0$;
c) $\log_4 \sqrt{x} \cdot \lg(x^3 - 7) = 0$;
d) $\log_{\frac{1}{2}} x \cdot \log_2(x-1) \cdot \lg(x^2 - 4) = 0$.



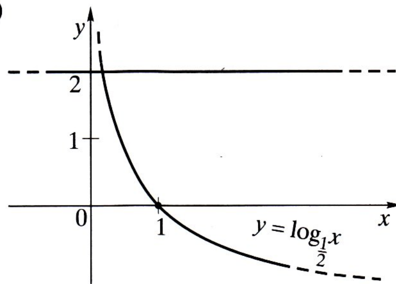
Sandauga lygi 0, kai bent vienas dauginamasis lygus 0, o kitas dauginamasis turi prasmę.

28. Mokinys logaritminę lygtį $\log_a x = b$ sprendė grafiškai, t. y. braižė kairiosios ir dešiniosios lygties pusių grafikus $y = \log_a x$ ir $y = b$.

a)



b)



1) Nustatykite, kokia tai buvo lygtis.
2) Iš grafiko raskite jos sprendinį, o po to raskite tos lygties sprendinį algebriškai.
3) Ar gali lygtis $\log_a x = b$, kur a ir b skaičiai ($a > 0$, $a \neq 1$), neturėti sprendinių? turėti du sprendinius?

29. Grafiškai raskite lygties sprendinį.

a) $\log_2 x = \frac{1}{2}$; b) $\log_{\frac{1}{2}} x = -2$; c) $\lg x = \frac{1}{2}$.

30. Išspręskite logaritminę lygtį, įvedę naują nežinomąjį.

a) $\log_3^2 x - 3\log_3 x + 2 = 0$;

b) $\log_2^2 x - 2\log_2 x - 8 = 0$;

c) $\lg^2 x = 10\lg x$.



Išspręskime lygtį $\log_5^2 x - 5\log_5 x + 6 = 0$.
Čia užrašas $\log_5^2 x$ reiškia $(\log_5 x)^2$.
Lygtyje yra pasikartojantis reiškinys $\log_5 x$. Jį pažymėkime y:

$$y = \log_5 x.$$

Tada lygtis taps tokia: $y^2 - 5y + 6 = 0$. Jos sprendiniai: $y_1 = 2$, $y_2 = 3$.
Iš lygybių

$$\log_5 x = 2 \quad \text{ir} \quad \log_5 x = 3$$

randame x:

$$x = 5^2 \quad \text{ir} \quad x = 5^3$$

$$x_1 = 25, \quad x_2 = 125.$$

Patikriname:
kai $x = 25$, tai $\log_5^2 25 - 5\log_5 25 + 6 = 2^2 - 5\cdot 2 + 6 = 0$;
kai $x = 125$, tai $\log_5^2 125 - 5\log_5 125 + 6 = 3^2 - 5\cdot 3 + 6 = 0$.
Atsakymas. 25; 125.

Lygtys, kuriose nežinomasis yra logaritmo pagrindo reiškinyje

31. Išspręskite lygtis.

a) $\log_x 9 = 2$, $\log_x 9 = -2$, $\log_x 9 = \frac{1}{2}$, $\log_x 9 = -\frac{1}{2}$;

b) $\log_{x+1} 25 = 2$, $\log_{x+1} 5 = \frac{1}{2}$, $\log_{x+1} 25 = -2$, $\log_{x+1} 5 = -1$;

c) $\log_{x^2} 1 = 2$, $\log_{x^2} 1 = -2$, $\log_{x^2} 1 = 1$, $\log_{x^2} 1 = 0$;

d) $\log_{\sqrt{x}} 5 = 2$, $\log_{\sqrt{x}} 5 = -2$, $\log_{\sqrt{x}} 1 = 0$, $\log_{\sqrt{x}} 5 = 0$.



Logaritmo pagrindas turi būti didesnis už 0 ir nelygus 1.

32. Išspręskite lygtį.

a) $\log_x(2x^2 - 25) = 2$;

b) $\log_{x+1}(x^2 - 2x) = 2$;

c) $\log_{0,1-x}(2x^2 + 5x - 2) = 0$.

8.4. Logaritminės nelygybės

Palyginkime logaritmus su vienodais pagrindais

$\log_2 16$ ir $\log_2 8$; $\log_{\frac{1}{2}} 16$ ir $\log_{\frac{1}{2}} 8$.

Vienu atveju logaritmų pagrindai yra *didesni* už 1, kitu — *mažesni* už 1. Akivaizdu, kad

$\log_2 16 > \log_2 8$; $\log_{\frac{1}{2}} 16 < \log_{\frac{1}{2}} 8$.

Remdamiesi šiomis skaitinėmis nelygybėmis, raskime sprendinius tokių nelygybių:

$\log_2 x > \log_2 8,$ $\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} 8,$

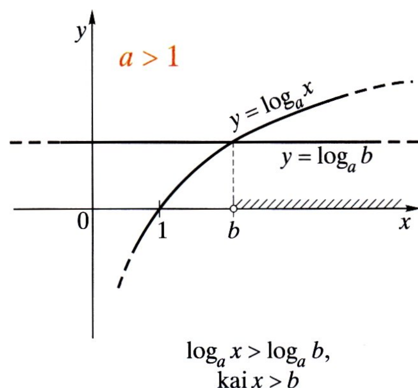
$x > 8;$ $0 < x < 8.$

Nesunku įsitikinti, kad nelygybės

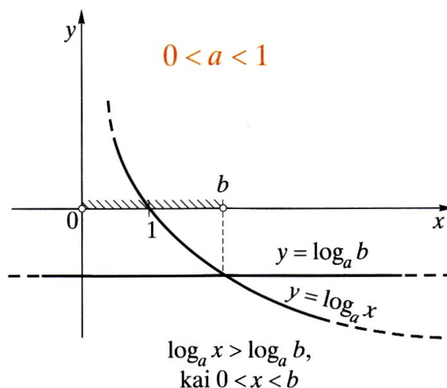
$$\log_a x > \log_a b$$

sprendiniai priklauso nuo logaritmo pagrindo a:

- kai $a > 1$, tai $x > b$;
- kai $0 < a < 1$, tai $0 < x < b$.



$\log_a x > \log_a b$,
kai $x > b$



$\log_a x > \log_a b$,
kai $0 < x < b$

1 PAVYZDYS. Išspręskime logaritminę nelygybę:

$$\log_2 x < 5.$$

Sprendimas. 1) Pirmiausia pertvarkykime nelygybę taip, kad ir dešinėje jos pusėje būtų logaritmas pagrindu 2. Kadangi $5 = \log_2 2^5 = \log_2 32$, tai nelygybė $\log_2 x < 5$ yra ekvivalenti nelygybei

$$\log_2 x < \log_2 32.$$

2) Kadangi logaritmo pagrindas $2 > 1$, tai nelygybė $\log_2 x < \log_2 32$ yra ekvivalenti nelygybių sistemai

$\begin{cases} x < 32, \\ x > 0 \end{cases}$ — numesdami logaritmus, nelygybės ženklo nekeitėme! — pologaritminis reiškinys turi būti didesnis už nulį!

Atsakymas. $x \in (0; 32)$.

2 PAVYZDYS. Išspręskime nelygybę:

$$\log_{\frac{1}{2}} x \geqslant 3.$$

Sprendimas. 1) Nelygybėje pakeitę 3 logaritmu, kurio pagrindas $\frac{1}{2}$, gauname:

$$\log_{\frac{1}{2}} x \geqslant \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^3,$$

$$\log_{\frac{1}{2}} x \geqslant \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}.$$

2) Kadangi logaritmo pagrindas $\frac{1}{2} < 1$, o pologaritminis reiškinys turi būti didesnis už nulį, tai pastaroji nelygybė ekvivalenti nelygybių sistemai:

$$\begin{cases} x \leqslant \frac{1}{8}, & \text{— numesdami logaritmus, nelygybės ženklą keitėme priešingu!} \\ x > 0. \end{cases}$$

Atsakymas. $x \in \left(0; \frac{1}{8}\right]$.

3 PAVYZDYS. Išspręskime nelygybę:

$$\log_{\frac{1}{3}} (5 - 2x) > -2.$$

Sprendimas. Kadangi $-2 = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = \log_{\frac{1}{3}} 3^2 = \log_{\frac{1}{3}} 9$, tai nelygybė ekvivalenti nelygybei

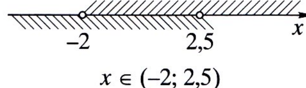
$$\log_{\frac{1}{3}} (5 - 2x) > \log_{\frac{1}{3}} 9.$$

Kadangi $\frac{1}{3} < 1$, o pologaritminis reiškinys $5-2x$ turi būti didesnis už 0, tai nelygybės $\log_{\frac{1}{3}} (5 - 2x) > \log_{\frac{1}{3}} 9$ sprendiniai yra nelygybių sistemos

$$\begin{cases} 5 - 2x < 9, \\ 5 - 2x > 0 \end{cases}$$

sprendiniai.
Išsprendžiame kiekvieną sistemos nelygybę:

$$\begin{cases} -2x < 4, \\ -2x > -5; \end{cases} \qquad \begin{cases} x > -2, \\ x < 2{,}5; \end{cases}$$



$x \in (-2; 2{,}5)$

Atsakymas. $x \in (-2; 2{,}5)$.

> Sprendžiant logaritminę nelygybę $\log_a f(x) > b$, galima vadovautis tokiu algoritmu:
> 1. Suteikiame jai pavidalą $\log_a f(x) > \log_a a^b$.
> 2. Randame nelygybės apibrėžimo sritį (nežinomojo reikšmes, su kuriomis nelygybė turi prasmę): $f(x) > 0$.
> 3. Palyginame logaritmo pagrindą su 1:
>   - jei $a > 1$, tai sprendžiame nelygybę $f(x) > a^b$;
>   - jei $0 < a < 1$, tai sprendžiame nelygybę $f(x) < a^b$.
> 4. Atsižvelgiame į nelygybės apibrėžimo sritį ir rašome atsakymą.

Pratimai ir uždaviniai

33. Koks ženklas (> , <) turėtų būti parašytas vietoj kvadratėlių:

a) $\log_2 8$ ■ $\log_2 64$; $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$ ■ $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$?

b) $\log_8 8$ ■ $\log_8 64$; $\log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{8}$ ■ $\log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{64}$?

c) $\log_{0,1} 15$ ■ $\log_{0,1} 16$; $\lg 0,2$ ■ $\lg 0,3$?

34. Pasirinkite teisingą atsakymą.

a) Nelygybės $\log_3 x > \log_3 9$ sprendinių aibė yra:

A $(0; 9)$ **B** $(0; 3)$ **C** $(9; +\infty)$ **D** $(3; 9)$ **E** $\varnothing$

b) Nelygybės $\log_4 x \leqslant \log_4 16$ sprendinių aibė yra:

A $(0; 16)$ **B** $(0; 4)$ **C** $(4; 16]$ **D** $(0; 16]$ **E** $(-\infty; 16)$

c) Nelygybės $\log_{\frac{1}{3}} 3 > \log_{\frac{1}{3}} x$ sprendinių aibė yra:

A $\left(\frac{1}{3}; 3\right)$ **B** $(3; +\infty)$ **C** $(0; 3)$ **D** $\left(0; \frac{1}{3}\right)$ **E** $\varnothing$

d) Nelygybės $\log_{0,1} x \leqslant \log_{0,1} 8$ sprendinių aibė yra:

A $(0,1; 10)$ **B** $(0; 8]$ **C** $(0,1; 8)$ **D** $[8; +\infty)$ **E** $\varnothing$

35. Išspręskite nelygybes.

a) $\log_4 x > \log_4 16$, $\log_4 x < \log_4 16$, $\log_4 x \leqslant 2$, $\log_4 x \geqslant -2$;

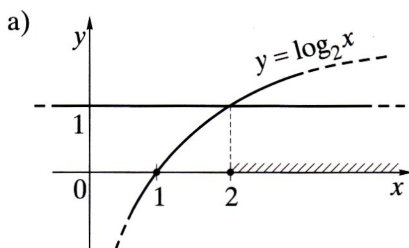
b) $\log_{\frac{1}{4}} x > \log_{\frac{1}{4}} 16$, $\log_{\frac{1}{4}} x \leqslant \log_{\frac{1}{4}} 4$, $\log_{\frac{1}{4}} x < -1$, $\log_{\frac{1}{4}} x \geqslant \frac{1}{2}$;

c) $\log_5(x+3) > \log_5(2x)$, $\log_{\frac{1}{5}}(x+3) > \log_{\frac{1}{5}}(2x)$, $\lg x \leqslant \lg(1-x)$;

d) $\lg(x^2 - 5x + 7) < 0$, $\log_3(x^2 - 5x + 7) \geqslant 0$.

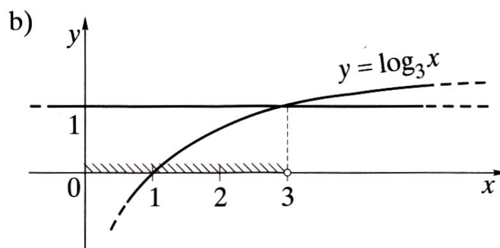
36. Mokinys nelygybę $\log_a x \bullet b$, kur a ir b skaičiai ($a > 0$ ir $a \neq 1$), o ženklas • žymi vieną iš nelygybės ženklų (> , < , ⩾ , ⩽), sprendė grafiškai:

a)



Atsakymas. $x \in [2; +\infty)$

b)



Atsakymas. $x \in (0; 3)$

1) Kokią nelygybę sprendė mokinys?
2) Išspręskite tą nelygybę algebriškai.
3) Ar gali nelygybė $\log_a x > b$ ($a > 0$, $a \neq 1$) neturėti sprendinių?

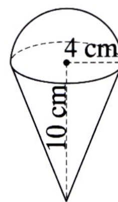
37. Grafiškai išspręskite nelygybę.

a) $\log_2 x \leqslant 3$; b) $\log_{\frac{1}{2}} x < -1$.

38. Paveikslėlyje pavaizduota ledų porcija, sudėta į kūginį vaflį. Virš kūgio esanti ledų dalis yra pusrutulio formos. Laikydami, kad kūgis yra pilnai pripildytas ledų ir imdami $\pi = 3{,}14$, apskaičiuokite:

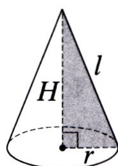
a) vaflio plotą;

b) ledų tūrį.



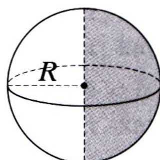


Statųjį trikampį sukdami apie jo statinį, gauname kūgį:



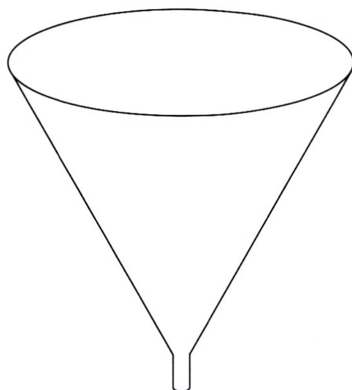
H — aukštinė,
r — pagrindo spindulys,
l — sudaromoji,
$S_{\text{pagr}} = \pi r^2$,
$S_{\text{šon}} = \pi r l$,
$V = \frac{1}{3}\pi r^2 H$.

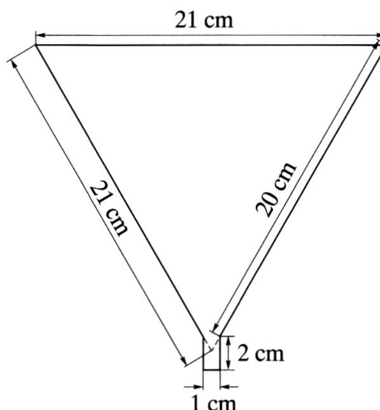
Pusskritulį sukdami apie jo skersmenį, gauname rutulį:



$S = 4\pi R^2$ — paviršiaus plotas,
$V = \frac{4}{3}\pi R^3$ — tūris.

39. Paveikslėlyje pavaizduotas piltuvėlis ir jo ašinis pjūvis:





a) Kiek kvadratinių centimetrų skardos reikėjo piltuvėliui pagaminti?

b) Koks piltuvėlio tūris mililitrais?



$1\,\text{m}\ell = 0{,}001\,\ell$; $1\,\ell = 1000\,\text{cm}^3$.

8.6. Pasitikrinkime

40. Apskaičiuokite logaritmo reikšmę.

a) $\log_5 125$; b) $\log_{\frac{1}{5}} 625$; c) $\log_5 \frac{1}{3125}$;

d) $\lg \frac{1}{10}$; e) $\lg 1$; f) $\log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{6}$.

41. Su kuriais x turi prasmę logaritmas:

a) $\log_2(x+1)$? b) $\log_{\frac{1}{3}}(x^3)$? c) $\log_5(x^2-4)$?

d) $\log_{\frac{1}{2}}(-x^2+3x)$? e) $\log_7 \sqrt{2x-4}$? f) $\lg \frac{1}{3x+7}$?

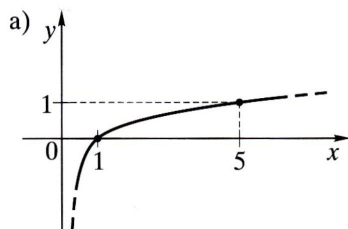
g) $\log_{x-1} 5$? h) $\log_{x^2+4} 10$? i) $\log_{2x^2-x} \frac{1}{2}$?

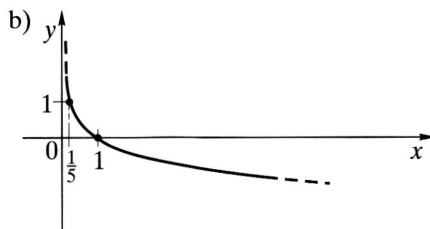
j) $\log_{2-x}(x+2)$? k) $\log_{-x}(x^2)$? l) $\log_{2x-1}(x^2-x-6)$?

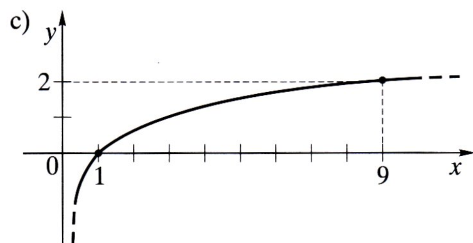
42. Nubraižykite funkcijos $y = f(x)$ grafiką.

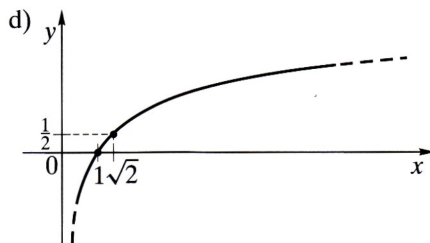
a) $f(x) = \log_4 x$; b) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$.

43. Pavaizduotas funkcijos $f(x) = \log_a x$ grafikas:

a)


b)


c)


d)


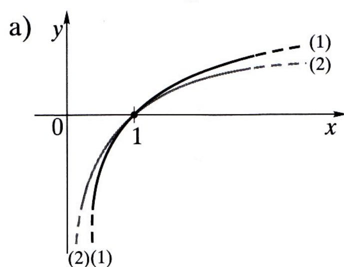
1) Nustatykite, kam lygus logaritmo pagrindas a.
2) Išvardykite funkcijos $y = f(x)$ savybes.

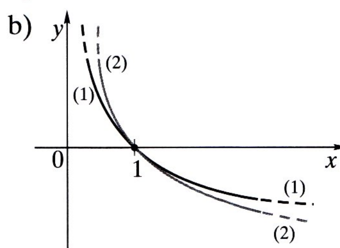
44. Taškas M priklauso logaritminės funkcijos $y = \log_b x$ grafikui. Nustatykite logaritmo pagrindo b reikšmę, jei taško M koordinatės yra:

a) $(7; 1)$; b) $(25; 2)$; c) $\left(\frac{1}{10}; 1\right)$;

d) $(10; -1)$; e) $\left(7; \frac{1}{2}\right)$; f) $\left(9; -\frac{1}{2}\right)$.

45. Vienoje koordinačių plokštumoje nubraižyti dviejų logaritminių funkcijų (1) $f(x) = \log_a x$ ir (2) $g(x) = \log_b x$ grafikai:

a) 

b) 

1) Nustatykite, kuris iš pagrindų yra didesnis: a ar b.
2) Koks ženklas ($>$, $<$ ar $=$) turėtų būti parašytas vietoj kvadratėlio:

$\log_a 5$ ■ $\log_a 7$? $\log_a \frac{1}{5}$ ■ $\log_a \frac{1}{7}$? $\log_a 5$ ■ $\log_b 5$? $\log_a \frac{1}{5}$ ■ $\log_b \frac{1}{5}$?
$\log_a 1$ ■ $\log_b 1$? $\log_a a$ ■ $\log_b b$?

46. Pabaikite sakinius:

a) Jei $a > 1$, $b > 1$ ir $a > b$, tai:
- $\log_a x > \log_b x$, kai $x \in \dots$;
- $\log_a x < \log_b x$, kai $x \in \dots$;
- $\log_a x = \log_b x$, kai $x = \dots$.

b) Jei $0 < a < 1$, $0 < b < 1$ ir $a > b$, tai:
- $\log_a x > \log_b x$, kai $x \in \dots$;
- $\log_a x < \log_b x$, kai $x \in \dots$;
- $\log_a x = \log_b x$, kai $x = \dots$.

47. Išspręskite lygtį.

a) $\log_6 x = 2$; b) $\log_6(2x - 1) = 2$; c) $\log_6(x^2) = -2$;
d) $\log_x 8 = 3$; e) $\log_{x-1} 25 = 2$; f) $\log_{2x-3} \frac{1}{100} = -2$.

48. Išspręskite nelygybę.

a) $\log_2 x < 4$; b) $\log_2 x \geqslant -3$; c) $\log_{\frac{1}{3}} x < 2$;
d) $\log_{\frac{1}{3}} x \geqslant -2$; e) $\log_{\frac{1}{2}}(4 - x) > -2$; f) $\log_3(2x - 5) \leqslant 2$.

49. Išspręskite lygtį.
a) $\log_2 x \cdot \log_3(x - 1) = 0$; b) $\log_3(2x) \cdot \log_3(x^2) = 0$.

50. Kūgio sudaromoji yra 6 cm, o jo pagrindo spindulys — 4 cm ilgio. Raskite kūgio:
a) viso paviršiaus plotą; b) tūrį.

51. Rutulio tūris lygus $\frac{9}{2}\pi$ mm^3. Raskite rutulio:
a) spindulio ilgį; b) paviršiaus plotą.

Piramidės

Egipto piramidės — vienintelis iš septynių pasaulio stebuklų, išlikusių iki mūsų dienų. Ne veltui senovėje buvo sakoma, kad „viskas bijo laiko, o laikas bijo piramidžių“. Pati aukščiausia — faraono Cheopso piramidė. Jos aukštis —

146,6 metro.

Kokį aukštį pasiektume, jei vieną ant kitos sustatytume 16 ($16 = 2^4 = 4^2$) Cheopso piramidžių? Uždavinys vaikiškas, bet atsakymas gražus:

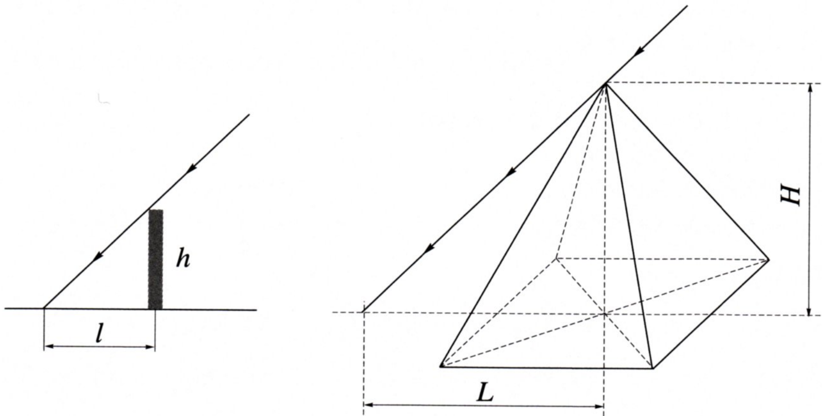
2345,6 metro!

Kaip nustatyti piramidės aukštį nematuojant?

Žodis trigonometrija sudarytas iš dviejų graikų kalbos žodžių *trigonon* — trikampis ir *metreo* — matavimas.

Taigi *trigonometrija* atsirado iš žinių apie trikampių matavimą. Kam reikėjo matuoti trikampius?

Pavyzdžiui, žymus graikų mokslininkas Talis taip sužinojo Egipto piramidės aukštį.



Talis įsmeigė į žemę h ilgio kuolą, išmatavo kuolo metamo šešėlio ilgį l ir piramidės metamo šešėlio ilgį L. Piramidės aukštį H jis apskaičiavo iš lygybės

$$\frac{H}{L} = \frac{h}{l}.$$

Taigi Talis pasinaudojo statinių santykiu, kurį dabar vadiname *tangentu*.

9 TRIGONOMETRINĖS FUNKCIJOS

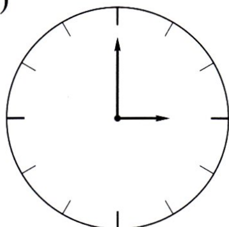
9.1. Posūkių kampai

Posūkių kampai

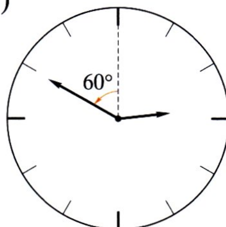
Imkime mechaninį laikrodį su rodyklėmis. Iš pradžių jį nustatykime taip, kad jis rodytų 3 valandą (žr. a) pav.). Pasukime laikrodžio minutinę rodyklę 10 minučių į kurią nors pusę:

- pasukę rodyklę atgal (*prieš* laikrodžio rodyklių ėjimo kryptį), gausime b) pav. pavaizduotą padėtį;
- pasukę rodyklę pirmyn (*pagal* laikrodžio rodyklių ėjimo kryptį), gausime c) pav. pavaizduotą padėtį.

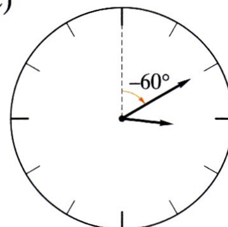
a)



b)



c)



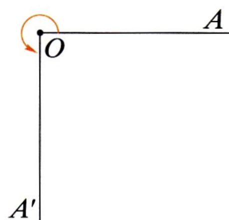
Abiem atvejais minutinę rodyklę pasukome vienodu 60° kampu. Tik sukome į priešingas puses.

Sakysime, kad minutinę rodyklę pasukome:
- b) atveju $+60^\circ$ kampu;
- c) atveju -60° kampu.

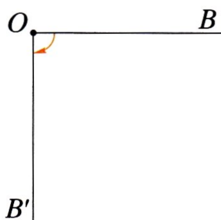
? Kokiu kampu pasisuko valandinė rodyklė b) ir c) atvejais?

Kampus, kuriuos gauname sukdami spindulį apie jo pradžios tašką, vadinsime posūkių kampais.
*Kampus, gautus sukant spindulį **prieš** laikrodžio rodyklę, laikysime **teigiamaisiais**.*
*Kampus, gautus sukant spindulį **pagal** laikrodžio rodyklę, laikysime **neigiamaisiais**.*

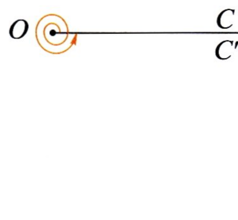
Posūkių kampų pavyzdžiai:



$\angle AOA' = 270^\circ$



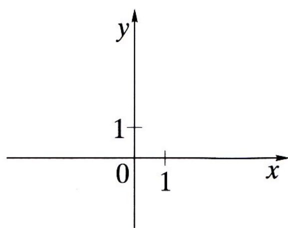
$\angle BOB' = -90^\circ$



$\angle COC' = 720^\circ$

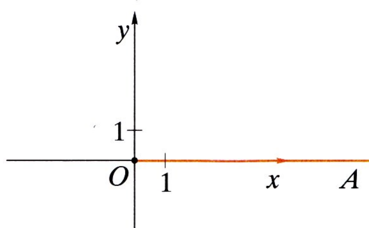
Posūkių kampai koordinačių plokštumoje

Posūkio kampus dažnai patogu sieti su plokštumos koordinačių sistema.

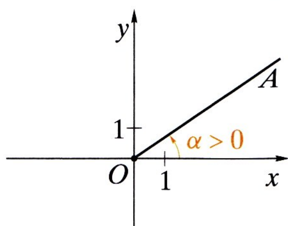


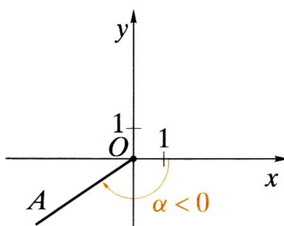
Laikysime, kad:

1) kampo viršūnė yra koordinačių pradžios taške O;
   pradinė spindulio OA kryptis sutampa su *teigiama* Ox ašies kryptimi;



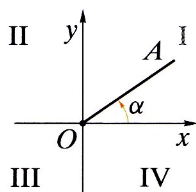
2) spindulį OA sukdami *prieš* laikrodžio rodyklę, gauname *teigiamą* posūkio kampą;
   spindulį OA sukdami *pagal* laikrodžio rodyklę, gauname *neigiamą* posūkio kampą;

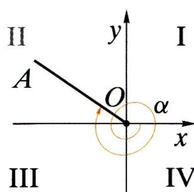


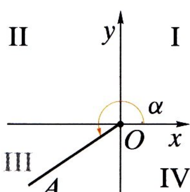


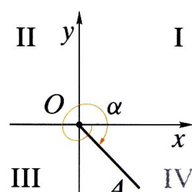
3) posūkio kampas α yra:

- pirmo ketvirčio, jei spindulio OA taškas A atsidūrė koordinačių plokštumos I ketvirtyje;
- antro ketvirčio, jei spindulio OA taškas A atsidūrė koordinačių plokštumos II ketvirtyje;
- trečio ketvirčio, jei spindulio OA taškas A atsidūrė koordinačių plokštumos III ketvirtyje;
- ketvirto ketvirčio, jei spindulio OA taškas A atsidūrė koordinačių plokštumos IV ketvirtyje.







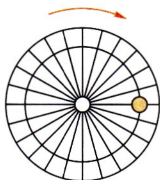


Pratimai ir uždaviniai

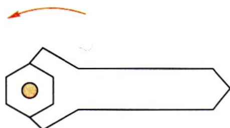
Posūkių kampai

52. Mechaninio laikrodžio su rodyklėmis minutinę rodyklę pasukome:
a) 30 min. į priekį; b) 15 min. atgal; c) 60 min. į priekį; d) 70 min. atgal.
Kokiu kampu pasisuko minutinė rodyklė ir kokiu kampu pasisuko valandinė rodyklė, jei laikrodis prieš sukant rodyklę rodė:
1) 15:00? 2) 16:10? 3) 12:10?

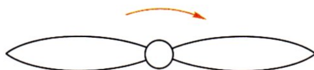
53. a) Prie dviračio rato stipino pritvirtintas atšvaitas. Dviračio ratas apsisuko 5 kartus. Kokiu kampu pasisuko atšvaitas?



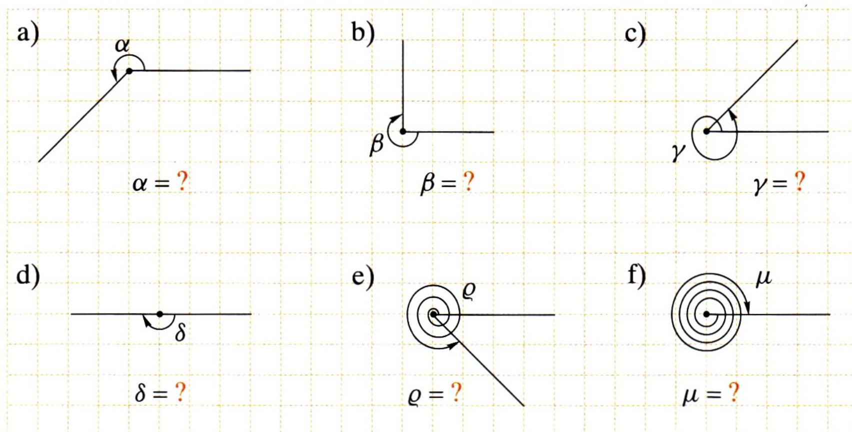
b) Veržliarakčiu atsukame veržlę. Raktą apsukome 2,5 karto. Kokiu kampu pasisuko veržlė?



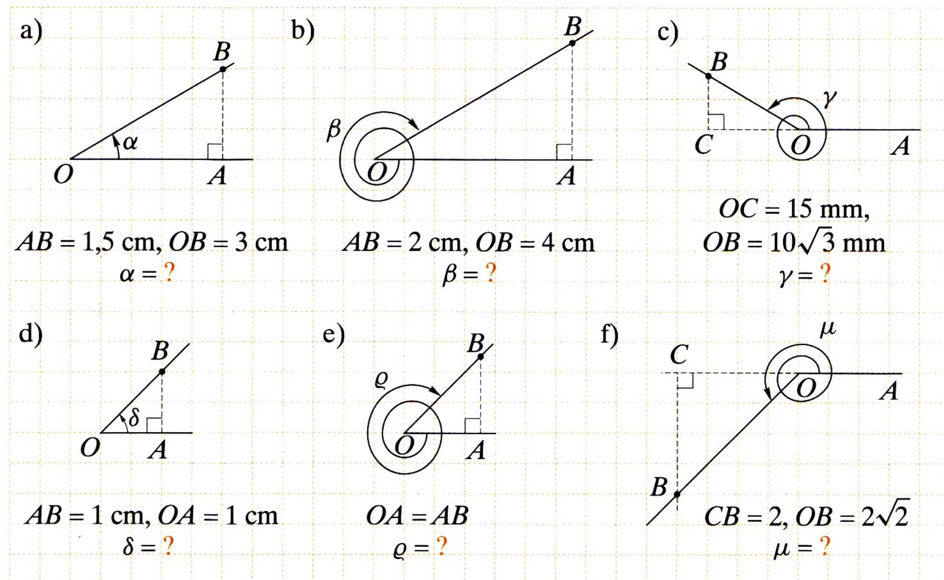
c) Sraigtasparnio sraigtas apsisuka 420 kartų per minutę. Kokiu kampu jis pasisuka per 1 sekundę?



54. Koks pavaizduoto posūkio kampo dydis?



55. Koks pavaizduoto posūkio kampo dydis?



Posūkių kampai koordinačių plokštumoje

56. Atidėkite koordinačių plokštumoje kampus: 135°, 495°, 850°, 30°, 750°, −40°, −400°, −760°. Kurių ketvirčių šie kampai?

57. Kurių ketvirčių yra kampai $\alpha = 100°$, $\beta = 20°$, $\gamma = 324°$, $\delta = 280°$, $\rho = 395°$? kampai $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$, $-\delta$, $-\rho$?

58. Koordinačių plokštumoje atidėkite kampą $\angle AOA_1 = \alpha = 260°$ (OA sutampa su Ox). Kuriame ketvirtyje atsidurs taškas A_1, jei spindulį OA_1 pasuksime:

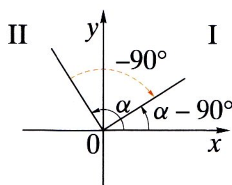
a) 20°? b) 70°? c) 150°? d) −50°?
e) −100°? f) −500°? g) 1340°? h) −1340°?

59. Kampas α yra II ketvirčio kampas. Kuriame ketvirtyje yra kampas:

a) $\alpha + 90°$? b) $\alpha + 180°$? c) $\alpha + 270°$? d) $\alpha + 360°$?
e) $\alpha - 90°$? f) $\alpha - 180°$? g) $\alpha - 270°$ h) $\alpha - 360°$?



Spręsdami naudokitės brėžiniu. Pavyzdžiui, kai α yra II ketvirčio kampas, tai $\alpha - 90°$ yra I ketvirčio kampas.

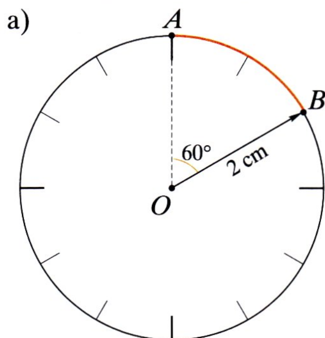


9.2. Kampų matavimas laipsniais ir radianais

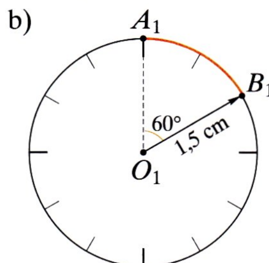
Kampų matavimas radianais

Imkime nevienodo dydžio laikrodžius. Tarkime, kad vieno laikrodžio minutinės rodyklės ilgis lygus 2 cm, antro — 1,5 cm, trečio — 1 cm. Per vienodą laiko tarpą rodyklės pasisuka vienodu kampu, pvz., per 10 minučių jos pasisuka 60°. Galima sakyti — minutinės rodyklės galas per 10 minučių nuėjo 60° kelią.

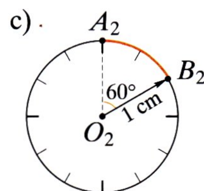
a)



b)



c)



$\angle AOB = 60°$
$\smile AB = 60°$
$\smile AB = ?$ cm

$\angle A_1O_1B_1 = 60°$
$\smile A_1B_1 = 60°$
$\smile A_1B_1 = ?$ cm

$\angle A_2O_2B_2 = 60°$
$\smile A_2B_2 = 60°$
$\smile A_2B_2 = ?$ cm

O kokį kelią *centimetrais* nuėjo kiekvieno laikrodžio minutinės rodyklės galas per 10 minučių? Akivaizdu, kad kuo ilgesnė rodyklė, tuo jos galas nueis didesnį atstumą.

Apskaičiuokite lankų AB, A_1B_1, A_2B_2 ilgius centimetrais.

O kaip susijęs rodyklės ilgis su jos galo nueito kelio ilgiu?

Kiekvieno laikrodžio atveju apskaičiuokite rodyklės galo nueito kelio ilgio ir rodyklės ilgio santykius:

$$\frac{\smile AB}{OB} = ?, \qquad \frac{\smile A_1B_1}{O_1B_1} = ?, \qquad \frac{\smile A_2B_2}{O_2B_2} = ?.$$

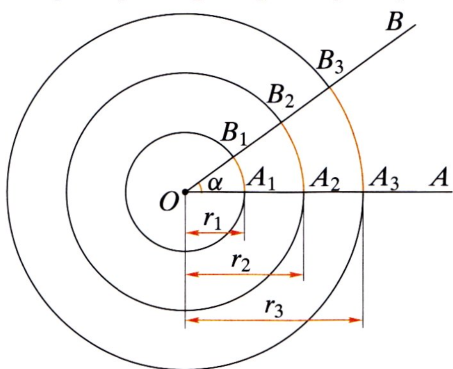
Pabaikite sakinį:

Jei pirmo laikrodžio rodyklė yra k kartų ilgesnė už antro laikrodžio rodyklę, tai pirmojo laikrodžio rodyklės galas per tą patį laiką nueina ... kartų didesnį atstumą negu antrojo laikrodžio, o kiekvieno laikrodžio rodyklės galo nueito kelio ir rodyklės ilgio santykis ...

Koks ženklas (>, <, =) turėtų būti parašytas vietoj kvadratėlių:

$$\frac{\smile AB}{OB} \blacksquare \frac{\smile A_1B_1}{O_1B_1} \blacksquare \frac{\smile A_2B_2}{O_2B_2}?$$

Situaciją su laikrodžiais panagrinėkime „matematiškai“.
Nubrėžkime kampą AOB ir apskritimus su spinduliais
$OA_1 = r_1$, $OA_2 = r_2$, $OA_3 = r_3$.



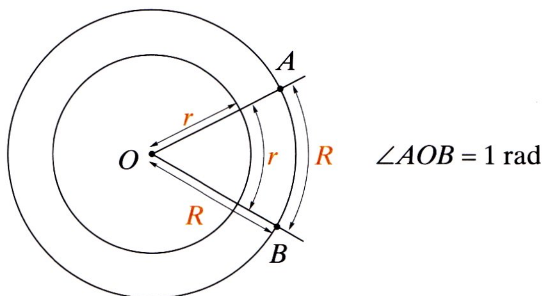
Lankų, kuriuos apskritimuose išpjauna kampo kraštinės, ilgių ir atitinkamų apskritimų spindulių ilgių santykiai yra lygūs tam pačiam *skaičiui* α:

$$\frac{\smile A_1B_1}{r_1} = \frac{\smile A_2B_2}{r_2} = \frac{\smile A_3B_3}{r_3} = \alpha.$$

Sakome: $\angle AOB$ dydis lygus α *radianų*.
Rašome: $\angle AOB = \alpha$ rad.

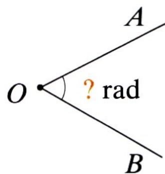
Jei $\alpha = 1$, tai kampo spinduliai kiekviename apskritime išpjauna lanką, kurio ilgis *lygus* to apskritimo spinduliui. To kampo dydis yra 1 radianas (žymima 1 rad).

Centrinio kampo, atitinkančio apskritimo lanką, kurio ilgis lygus apskritimo spindulio ilgiui, dydis lygus 1 *radianui.*

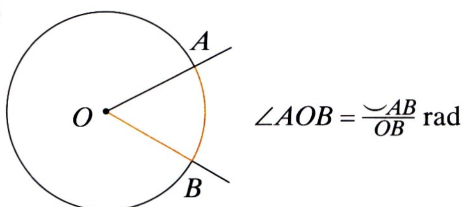


Norint sužinoti kampo dydį radianais, galima būtų nubrėžti apskritimą su centru kampo viršūnėje, išmatuoti lanko tarp kampo kraštinių ilgį (tiesa, tai ne taip jau paprasta) ir surasti šio ilgio santykį su apskritimo spindulio ilgiu. Gautasis skaičius išreiškia kampo dydį radianais.

1)



2)



$\angle AOB = \frac{\smile AB}{OB}$ rad

Pavyzdžiui, jei lanko tarp kampo kraštinių ilgis lygus pusei spindulio ilgio, tai to kampo dydis lygus $\frac{1}{2}$ radiano.

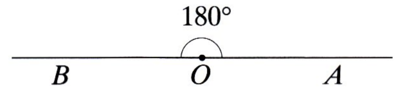

1) Kokiu radianų kampu pasisuka minutinė rodyklė per 10 minučių?
2) Per kiek laiko minutinė rodyklė pasisuka 1 rad kampu?

Laipsnių ir radianų ryšys

O kaip susiję kampų matavimo vienetai — laipsniai ir radianai:

- kiek laipsnių turi 1 radiano kampas?
- kiek radianų turi 1° kampas?

Nagrinėkime ištiestinį kampą AOB.



1) Ištiestinio kampo dydis lygus 180°:

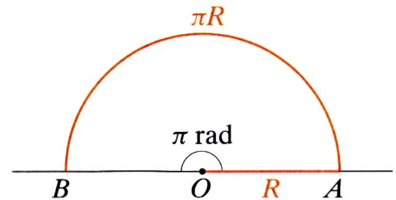
$$\angle AOB = 180^\circ.$$

2) Raskime to kampo dydį radianais.
Nubrėžkime pusapskritimį su centru O ir spinduliu R.
Apskaičiavę pusapskritimio ilgį:

$$\smile AB = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R = \pi R,$$

randame $\angle AOB$ dydį radianais:

$$\angle AOB = \frac{\smile AB}{R} = \frac{\pi R}{R} = \pi \text{ (rad)}.$$



3) Kadangi

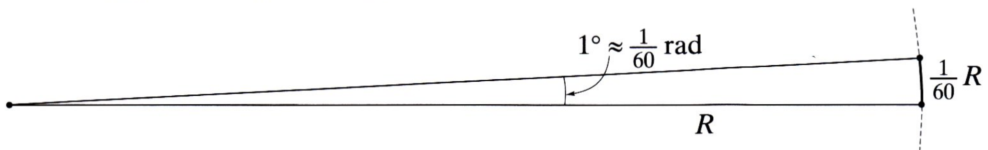
$$\angle AOB = 180^\circ, \quad \angle AOB = \pi \text{rad}, \quad \text{tai} \quad \boxed{180^\circ = \pi \text{rad}}$$

4) Iš čia

$$\boxed{1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}} \qquad \boxed{1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi}}$$

Apskaičiuokime apytikslę 1° reikšmę radianais, π reikšmę imdami lygią 3:

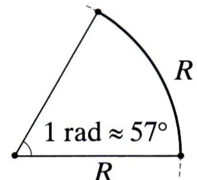
$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx \frac{3}{180} \text{ rad} = \frac{1}{60} \text{ rad}.$$



Apskaičiuokite, kiek radianų atitinka 1°, π reikšmę imdami lygią $3{,}14$.

Iš lygybės $1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi}$ apskaičiuokime, kiek laipsnių atitinka 1 rad dydžio kampas. Imdami π reikšmę, lygią $3{,}14$, gauname:

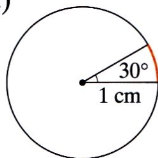
$$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx \frac{180^\circ}{3{,}14} \approx 57^\circ.$$

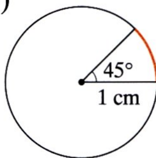


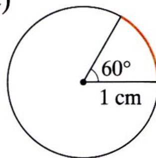
Apskaičiuokite, kiek laipsnių atitinka 1 rad, π reikšmę imdami lygią 3.

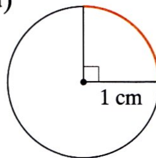
Pratimai ir uždaviniai

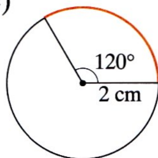
60. Koks pavaizduoto apskritimo nuspalvinto lanko ilgis centimetrais? (Raskite tikslią ilgio reikšmę ir apskaičiuokite ją 0,1 tikslumu.)

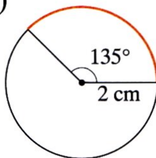
a)


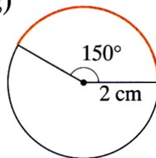
b)


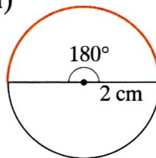
c)


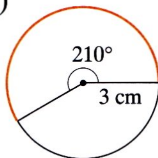
d)


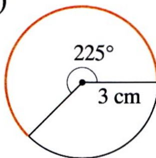
e)


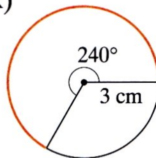
f)


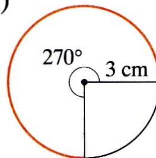
g)


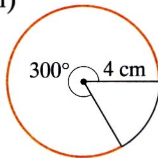
h)


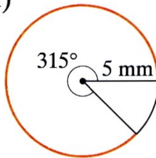
i)


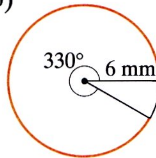
j)


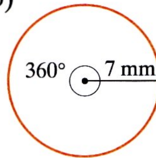
k)


l)


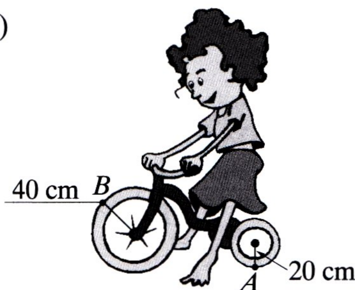
m)


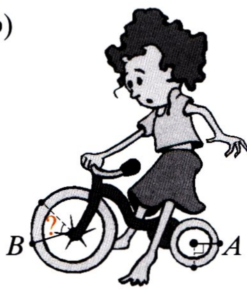
n)


o)


p)


61. Paveikslėlyje a) pavaizduotas žaislinis motociklas. Motociklo vieno rato spindulys lygus 20 cm, kito rato — 40 cm. Motociklas pariedėjo į priekį tiek, kad mažesnysis ratas pasisuko 90° kampu (žr. b) pav.).

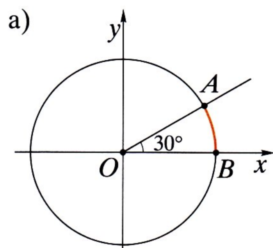
a)


b)


1) Kokie motociklo ratų ilgiai centimetrais?
2) Kokį atstumą nuriedėjo motociklas (dešimčių centimetrų tikslumu)?
3) Kokiu kampu (laipsniais) pasisuko didesnysis motociklo ratas?

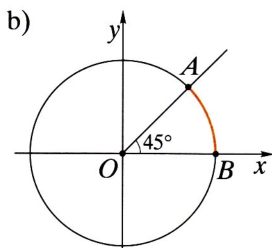
62. Koks kampo AOB dydis radianais?

a)



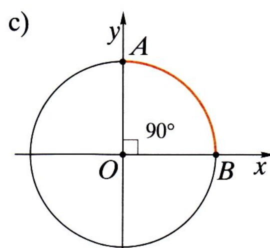
$OB = 1$ cm
$\smile AB = \frac{\pi}{6}$ cm

b)



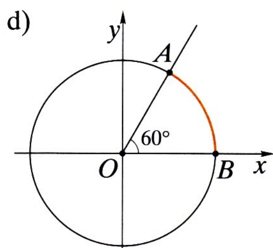
$OB = 2$ cm
$\smile AB = \frac{\pi}{2}$ cm

c)



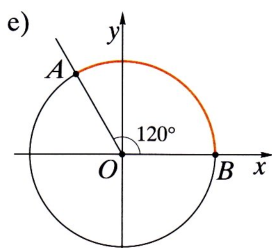
$OB = 3$ cm
$\smile AB = \frac{3\pi}{2}$ cm

d)



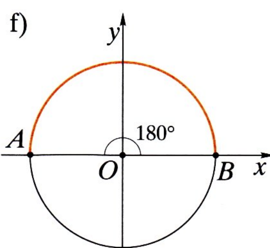
$OB = 1$ cm
$\smile AB = \frac{\pi}{3}$ cm

e)



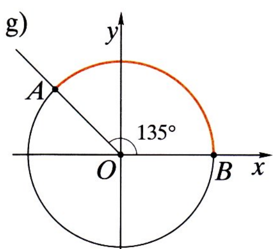
$OB = 2$ cm
$\smile AB = \frac{4\pi}{3}$ cm

f)



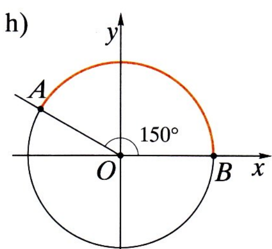
$OB = 3$ cm
$\smile AB = 3\pi$ cm

g)



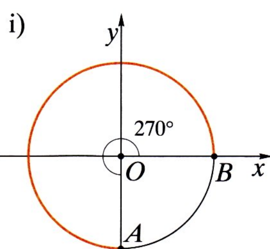
$OB = 1$ cm
$\smile AB = \frac{3\pi}{4}$ cm

h)



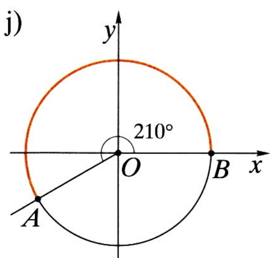
$OB = 2$ cm
$\smile AB = \frac{5\pi}{3}$ cm

i)



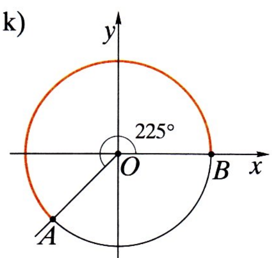
$OB = 3$ cm
$\smile AB = \frac{9\pi}{2}$ cm

j)



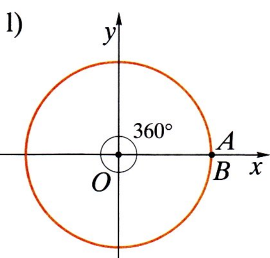
$OB = 1$ cm
$\smile AB = \frac{7\pi}{6}$ cm

k)



$OB = 2$ cm
$\smile AB = \frac{5\pi}{2}$ cm

l)



$OB = 3$ cm
$\smile AB = 6\pi$ cm

Ar skaičiuojant buvo būtina žinoti OB ir $\smile AB$ ilgius?

63. a) Kiek laipsnių ir kiek radianų sudaro pilnutinis kampas (visas apskritimas)?

b) Kiek radianų sudaro 1° ($\frac{1}{360}$ apskritimo)? 2°? 3°?

c) Kiek laipsnių sudaro 1 radianas? 2 radianai? 3 radianai?

64. Užpildykite lentelę:

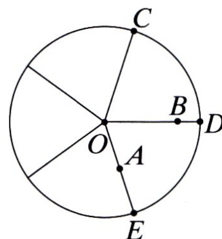
Laipsniai	0°	1°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Radianai										

210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°	390°	405°	420°	450°

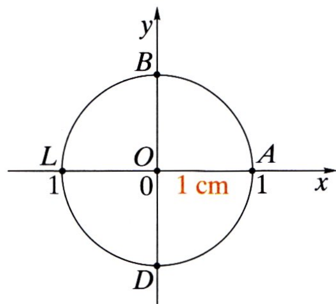
65. Brėžinyje pavaizduotas vežimo ratas. Rate yra 5 stipinai, tarp kurių atstumai vienodi. Vežimui pavažiavus, jo ratas apsisuko:

a) 1 kartą; b) 2 kartus; c) 3 kartus.

1) Kokį kelią nuėjo vežimo rato taškai A, B ir C, jei: $OA = 20\,\text{cm}$, $OB = 30\,\text{cm}$, $OC = 40\,\text{cm}$?
2) Kiek nuvažiavo vežimas?
3) Koks vežimo rato ilgis?
4) Koks kampas tarp gretimų rato stipinų?
5) Kokį kelią nueis musė, eidama maršrutu $AOBDC$? maršrutu $AEDC$?

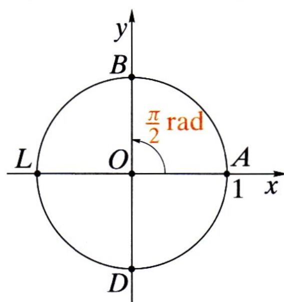


66. Koordinačių plokštumoje nubrėžkime apskritimą su centru koordinačių pradžios taške ir spinduliu, lygiu 1 centimetrui.



1) Raskime šio apskritimo ilgį:
   $C = 2\pi R = 2\pi \cdot OA = 2\pi \cdot 1 = 2\pi$ (cm).
   Apskaičiuokite apskritimo ilgį, π reikšmę imdami lygią 3,14.
2) Raskime lanko AB ilgį:
   $\smile AB = \frac{C}{4} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ (cm).
   a) Apskaičiuokite $\smile AB$ ilgį, π reikšmę imdami lygią 3,14.
   b) Koks lanko ABL ilgis?
   c) Koks $\smile AD$ ilgis?

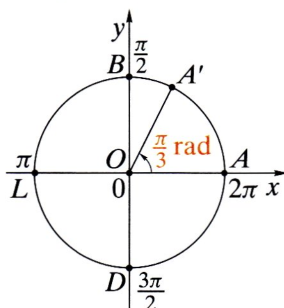
3) Apskaičiuokime teigiamo kampo AOB dydį radianais:



$$\angle AOB = \frac{\smile AB}{OA} = \frac{\pi}{2} : 1 = \frac{\pi}{2} \text{ rad.}$$

a) Apskaičiuokite $\angle AOB$ dydį radianais, π reikšmę imdami lygią 3,14.
b) Kam lygūs teigiamų kampų $\angle AOL$, $\angle AOD$, $\angle AOA$ dydžiai radianais?

4) Nustatykime, kuriame ketvirtyje bus taškas A, spindulį OA sukant $\frac{\pi}{3}$ radianų kampu. Apskaičiuokime to posūkio kampo dydį laipsniais:



π rad $= 180°$,
$\frac{\pi}{3}$ rad $= 60°$,
$\angle AOA' = 60°$ — A pereis į I ketvirtį.

a) Apskaičiuokite $\smile AA'$ ilgį centimetrais.
b) Nustatykite, kuriame ketvirtyje bus taškas A, spindulį OA sukant $\frac{\pi}{4}$ rad, $\frac{2\pi}{3}$ rad, $\frac{5\pi}{6}$ rad, $\frac{7\pi}{6}$ rad, $\frac{7\pi}{4}$ rad kampu.
c) Kokio dydžio (laipsniais) yra tie posūkių kampai?
d) Kokį atstumą kiekvienu atveju nueis taškas A?

67. a) Koks kampo α dydis radianais, jei jo dydis laipsniais yra:
$0°$? $10°$? $20°$? $210°$? $-15°$? $-30°$?
b) Koks kampo α dydis laipsniais, jei jo dydis radianais yra:
0? $\frac{\pi}{3}$? $\frac{\pi}{2}$? $\frac{2\pi}{7}$? 1? 2? 3?



Jei l — kampo dydis laipsniais, o α — to paties kampo dydis radianais, tai:

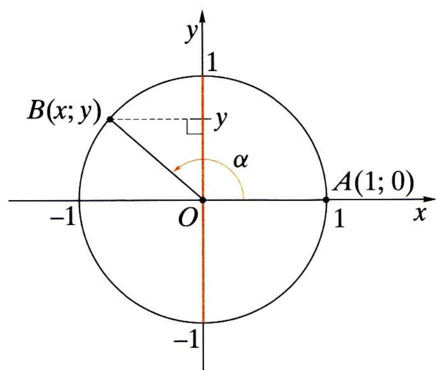
$$\alpha = \frac{\pi \cdot l}{180}; \quad l = \frac{180° \cdot \alpha}{\pi}.$$

9.3. Kampo sinusas. Funkcija $f(x) = \sin x$

Bet kokio kampo sinusas

Imkime koordinačių plokštumą Oxy. Joje nubrėžkime apskritimą, kurio spindulys lygus 1, o centras — koordinačių pradžios taškas, ir pažymėkime tašką $A(1; 0)$. Nagrinėkime posūkių kampus, gaunamus sukant spindulį OA.

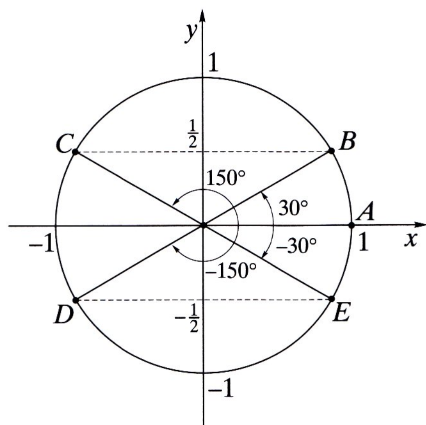
Pasukus spindulį OA kampu α, taškas $A(1; 0)$ pereina į tašką $B(x; y)$. Taško B koordinatę y vadinsime kampo α ***sinusu***.



$$\sin\alpha = y$$

Iš brėžinio matome, kad $\sin\alpha$:
- apibrėžtas su visais α (α — $\angle AOB$ dydis laipsniais arba radianais);
- įgyja reikšmes iš intervalo $[-1; 1]$.

Remdamiesi brėžiniu, nustatykime, kam lygu $\sin 30°$:

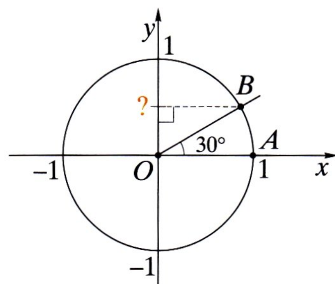


$\sin 30° = \frac{1}{2}$, nes taško B koordinatė $y = \frac{1}{2}$.

Remdamiesi brėžiniu, pasakykite, kam lygu:

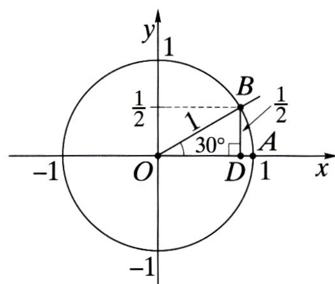
$\sin 150°$, $\sin 210°$, $\sin 330°$, $\sin(-30°)$, $\sin(-150°)$, $\sin(-210°)$, $\sin(-330°)$.

UŽDAVINYS. Įrodykime, kad $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.



Duota: $\angle AOB = 30^\circ$, $OA = 1$.
Rasti: $\sin 30^\circ = y_B$.

Sprendimas. Iš taško B brėžiame $BD \perp OA$. $\triangle BDO$ — status ($\angle D = 90^\circ$), $\angle BOD = 30^\circ$, $BO = OA = 1$. Raskime statinio BD ilgį. Statinis BD yra prieš 30° kampą. Prieš 30° kampą esantis statinis lygus pusei įžambinės:



$BD = \frac{OB}{2} = \frac{1}{2}$.

Kadangi BD ilgis yra $\frac{1}{2}$, o taškas B yra I ketvirtyje, tai taško B koordinatė $y = \frac{1}{2}$. Taigi

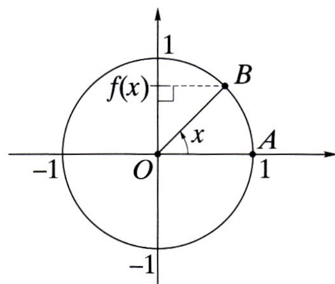
$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}.$$

Paaiškinkite, kodėl $\sin(-30^\circ) = -\frac{1}{2}$.

Funkcija $f(x) = \sin x$

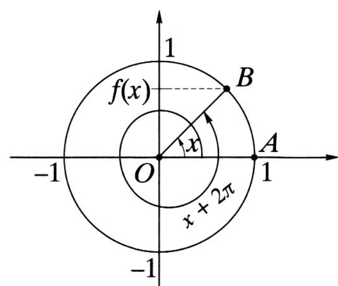
Iš kampo sinuso apibrėžimo matome, kad $\sin x$ apibrėžtas su visais x ($x \in \boldsymbol{R}$) ir įgyja reikšmes iš intervalo $[-1; 1]$ ($\sin x \in [-1; 1]$).

Nagrinėkime funkciją $f(x) = \sin x$.



$f(x) = \sin x$,
$D_f = \boldsymbol{R}$ — apibrėžimo sritis,
$E_f = [-1; 1]$ — reikšmių sritis.

Nesunku pastebėti, kad su bet kuria x reikšme $\sin x = \sin(x + 2\pi)$. Su mažesnėmis nei $T = 2\pi$ reikšmėmis $\sin(x + T)$ reikšmės nekartoja $\sin x$ reikšmių.
Sakoma, kad funkcija $f(x) = \sin x$ yra *periodinė* su mažiausiu teigiamu periodu 2π.



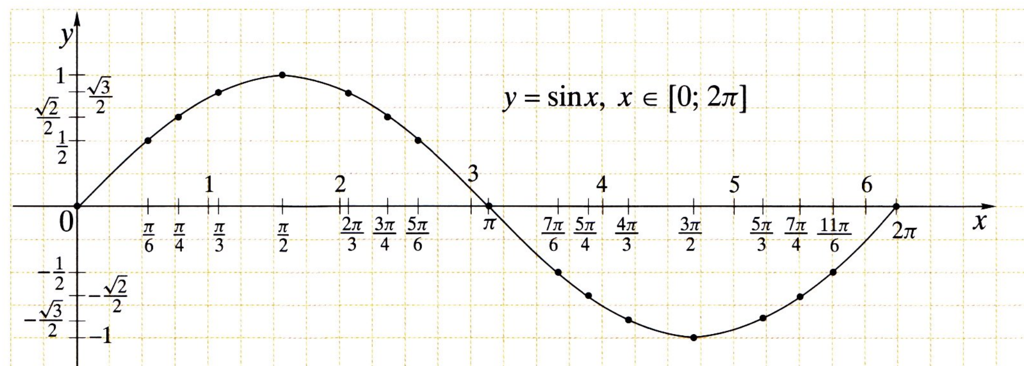
$$\sin x = \sin(x+2\pi)$$

Nubraižykime funkcijos $f(x) = \sin x$ grafiką intervale $[0; 2\pi]$.
Imkime patogias x reikšmes (tas, kurių sinusus žinome) ir sudarykime reikšmių lentelę:

x (laipsniai)	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
x (radianai)	0	$\frac{\pi}{6} \approx 0{,}52$	$\frac{\pi}{4} \approx 0{,}79$	$\frac{\pi}{3} \approx 1{,}05$	$\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$	$\frac{2\pi}{3} \approx 2{,}09$	$\frac{3\pi}{4} \approx 2{,}36$	$\frac{5\pi}{6} \approx 2{,}62$	$\pi \approx 3{,}14$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2} = 0{,}5$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}71$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}87$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}87$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}71$	$\frac{1}{2} = 0{,}5$	0

x (laipsniai)	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
x (radianai)	$\frac{7\pi}{6} \approx 3{,}67$	$\frac{5\pi}{4} \approx 3{,}93$	$\frac{4\pi}{3} \approx 4{,}19$	$\frac{3\pi}{2} \approx 4{,}71$	$\frac{5\pi}{3} \approx 5{,}24$	$\frac{7\pi}{4} \approx 5{,}50$	$\frac{11\pi}{6} \approx 5{,}76$	$2\pi \approx 6{,}28$
$\sin x$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

Atidėję koordinačių plokštumoje taškus $(x; \sin x)$, juos sujunkime glodžia kreive. Kuo daugiau taškų $(x; \sin x)$ imsime, tuo tikslesnį $y = \sin x$ grafiko vaizdą gausime.



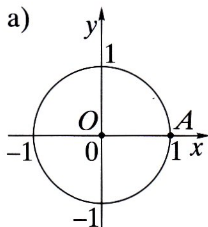

Nubraižykite funkcijos $f(x) = \sin x$ grafiką intervale: a) $[-2\pi; 0]$; b) $[2\pi; 4\pi]$. Braižydami remkitės funkcijos $y = \sin x$ grafiku intervale $x \in [0; \pi]$ ir tuo, kad funkcija $f(x) = \sin x$ yra periodinė, jos periodas yra 2π, t. y. $\sin x = \sin(x + 2\pi)$.

Pratimai ir uždaviniai

Bet kokio kampo sinusas

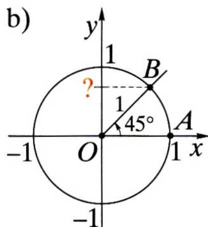
68. 1) Remdamiesi brėžiniu, nustatykite, kam lygūs nurodytų kampų sinusai.

a)



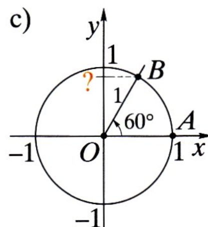
sin 0° = ?
sin 360° = ?
sin (–360°) = ?
sin 720° = ?
sin (–720°) = ?

b)



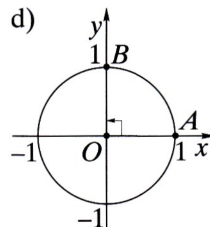
sin 45° = ?
sin (–315°) = ?
sin 405° = ?
sin (–675°) = ?
sin 765° = ?

c)



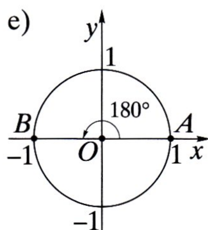
sin 60° = ?
sin (–300°) = ?
sin 420° = ?
sin (–760°) = ?
sin 780° = ?

d)



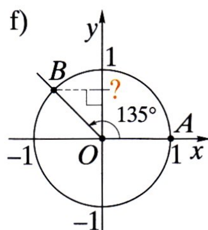
sin 90° = ?
sin (–270°) = ?
sin 450° = ?
sin (–630°) = ?
sin 810° = ?

e)



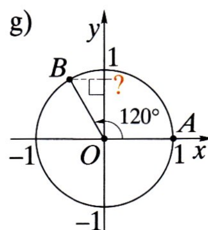
sin 180° = ?
sin (–180°) = ?
sin 540° = ?
sin (–540°) = ?

f)



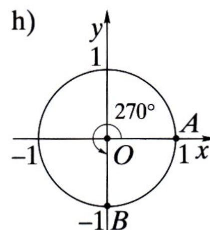
sin 135° = ?
sin (–225°) = ?
sin 495° = ?
sin (–585°) = ?

g)



sin 120° = ?
sin (–240°) = ?
sin 480° = ?
sin (–600°) = ?

h)



sin 270° = ?
sin (–90°) = ?
sin 630° = ?
sin (–450°) = ?



1) Pasižiūrėkite, kaip 42 psl. įrodyta, jog $\sin 30° = \frac{1}{2}$.
2) Jei stačiojo trikampio vienas kampas lygus 45°, tai kitas kampas irgi lygus 45°, o trikampis yra lygiašonis (jo statiniai lygūs).
3) Jei stačiojo trikampio vienas kampas lygus 60°, tai kitas kampas yra 30°. Statinis prieš 30° kampą lygus pusei įžambinės.

2) Pabaikite lygybes (lygybėse k yra sveikasis skaičius, t. y. $k \in \boldsymbol{Z}$).

$\sin(360° \cdot k) = \ldots$;
$\sin(45° + 360° \cdot k) = \ldots$;
$\sin(60° + 360° \cdot k) = \ldots$;
$\sin(90° + 360° \cdot k) = \ldots$;
$\sin(180° + 360° \cdot k) = \ldots$;
$\sin(135° + 360° \cdot k) = \ldots$;
$\sin(120° + 360° \cdot k) = \ldots$;
$\sin(270° + 360° \cdot k) = \ldots$;
$\sin(30° + 360° \cdot k) = \ldots$.

69. 1) Pabaikite sakinį.

a) Kampo x reikšmėms *didėjant* nuo 0° iki 90°, tų kampų sinusai, t. y. $\sin x$ reikšmės, *didėja* nuo 0 iki ... .

b) Kampo x reikšmėms *didėjant* nuo 90° iki 180°, $\sin x$ reikšmės ... .

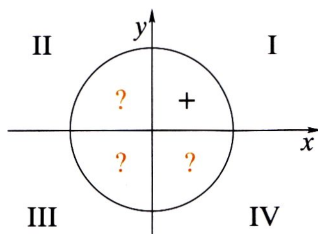
c) Kampo x reikšmėms *didėjant* nuo 180° iki 270°, $\sin x$ reikšmės ... .

d) Kampo x reikšmėms *didėjant* nuo 270° iki 360°, $\sin x$ reikšmės ... .

2) Neskaičiuodami sinuso reikšmių, pasakykite, koks ženklas (>, <, =) turėtų būti parašytas vietoj kvadratėlio.

a) $\sin 1^\circ$ ■ $\sin 2^\circ$;
b) $\sin 88^\circ$ ■ $\sin 89^\circ$;
c) $\sin 90^\circ$ ■ $\sin 91^\circ$;
d) $\sin 185^\circ$ ■ $\sin 209^\circ$;
e) $\sin 301^\circ$ ■ $\sin 310^\circ$;
f) $\sin(-15^\circ)$ ■ $\sin(-16^\circ)$;
g) $\sin(-90^\circ)$ ■ $\sin(-95^\circ)$;
h) $\sin(-185^\circ)$ ■ $\sin(-200^\circ)$;
i) $\sin(-273^\circ)$ ■ $\sin(-360^\circ)$;
j) $\sin 585^\circ$ ■ $\sin 600^\circ$;
k) $\sin 1253^\circ$ ■ $\sin 1255^\circ$;
l) $\sin(-1253^\circ)$ ■ $\sin(-1255^\circ)$.

70. Kai kampas α yra I ketvirčio kampas, tai $\sin\alpha > 0$. Kitaip sakant, I ketvirčio kampų sinusai yra teigiami:



1) Kokie II, III ir IV ketvirčio kampų sinusai?

2) Kampas $\alpha \in (0; 180^\circ)$. Koks ženklas (>, <) turėtų būti parašytas vietoj kvadratėlio: $\sin\alpha$ ■ 0?

3) Kampas $\alpha \in (180^\circ; 360^\circ)$. Koks ženklas (>, <) turėtų būti parašytas vietoj kvadratėlio: $\sin\alpha$ ■ 0?

71. 1) Žinoma, kad $\sin 1^\circ \approx 0{,}017$. Kam lygu

$\sin(-1^\circ)$? $\sin 179^\circ$? $\sin(-179^\circ)$?

2) Žinoma, kad $\sin 94^\circ \approx 0{,}998$. Kam lygu

$\sin(-94^\circ)$? $\sin 86^\circ$? $\sin(-86^\circ)$?

3) Žinoma, kad $\sin 195^\circ \approx -0{,}259$. Kam lygu

$\sin(-195^\circ)$? $\sin 165^\circ$? $\sin(-165^\circ)$?

4) Kokių kampų $\alpha \in (0^\circ; 360^\circ)$ sinusus galėtumėte pasakyti remdamiesi lygybe $\sin 320^\circ \approx -0{,}643$?

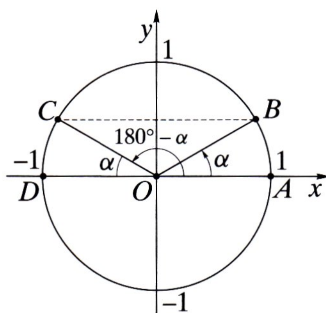
5) Įsitikinkite, kad:

a) $\sin\alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$; b) $\sin\alpha = -\sin(-\alpha)$;

c) $\sin(90^\circ + \alpha) = \sin(90^\circ - \alpha)$; d) $\sin(270^\circ + \alpha) = \sin(270^\circ - \alpha)$;

e) $\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin(180^\circ - \alpha)$; f) $\sin(360^\circ + \alpha) = -\sin(360^\circ - \alpha)$.





$\angle AOB = \alpha$,
$\angle DOC = \alpha$,
$\angle AOC = 180^\circ - \alpha$.
Taškų B ir C koordinatės y vienodos, todėl $\sin\angle AOB = \sin\angle AOC$.
Vadinasi,
$\sin\alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$.

6) Remdamiesi trigonometrinių funkcijų reikšmių lentele (žr. 199 psl.), nustatykite, kam lygu:

a) $\sin 12^\circ$, $\sin(-12^\circ)$, $\sin 168^\circ$, $\sin 192^\circ$, $\sin 348^\circ$;

b) $\sin 100^\circ$, $\sin 260^\circ$, $\sin 280^\circ$, $\sin(-280^\circ)$.

72. Pabaikite lygybes, kuriose kampų dydžiai nurodyti radianais.

a) $\sin 0 = \dots$, $\sin\frac{\pi}{6} = \dots$, $\sin\frac{\pi}{4} = \dots$, $\sin\frac{\pi}{3} = \dots$, $\sin\frac{\pi}{2} = \dots$;

b) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \dots$, $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \dots$, $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \dots$, $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \dots$;

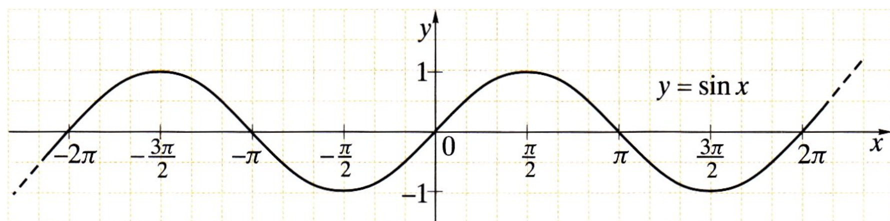
c) $\sin(-\pi) = \dots$, $\sin(2\pi) = \dots$, $\sin(4\pi) = \dots$, $\sin(-2\pi) = \dots$.



Užraše $\sin\alpha$ raidė α žymi kampo dydį, kuris gali būti reiškiamas arba laipsniais arba radianais.
Kai $\alpha = 10^\circ$, tai rašome $\sin\alpha = \sin 10^\circ$;
kai $\alpha = 10\,\text{rad}$, tai rašome $\sin\alpha = \sin 10$.

Funkcija $f(x) = \sin x$

73. 1) Remdamiesi sinuso grafiku (sinuso grafikas dar vadinamas *sinusoide*), parašykite intervalus, kuriuose funkcija $f(x) = \sin x$ yra:
a) didėjanti; b) mažėjanti.



2) Pasakykite funkcijos $f(x) = \sin x$:
a) apibrėžimo sritį, reikšmių sritį;

b) x reikšmes, su kuriomis $f(x) = 0$;
c) x reikšmes, su kuriomis $f(x) = 1$;
d) x reikšmes, su kuriomis $f(x) = -1$.

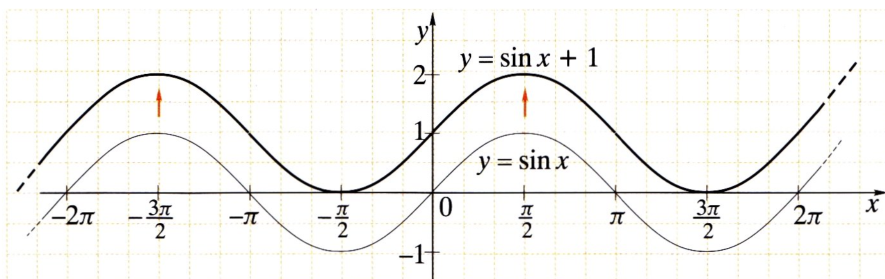
3) Ar funkcijos $f(x) = \sin x$ grafikas:
a) yra simetriškas koordinačių pradžios taško (0; 0) atžvilgiu?
b) yra simetriškas ordinačių ašies Oy atžvilgiu?
c) turi simetrijos centrą? simetrijos ašį?

4) Ar teisinga lygybė: a) $\sin(x) = -\sin(-x)$? b) $\sin(x) = \sin(-x)$?

5) Ar funkcija $f(x) = \sin x$ yra:
a) lyginė? b) nelyginė? c) nei lyginė, nei nelyginė?

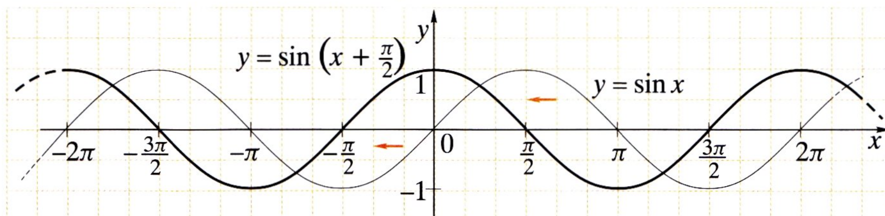
6) Ar funkcija $f(x) = \sin x$ yra: a) periodinė? b) neperiodinė?

74. a) Nubraižytas $y = \sin x + 1$ grafikas. Jį galima gauti lygiagrečiai Oy ašiai pastūmus $y = \sin x$ grafiką per 1 vienetą *aukštyn*:



Nubraižykite grafiką $y = \sin x - 1$. Paaiškinkite, kaip, remiantis $y = \sin x$ grafiku, galima nubraižyti grafiką $y = \sin x + a$, kur a — skaičius.

b) Nubraižytas $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ grafikas. Jį galima gauti lygiagrečiai Ox ašiai pastūmus $y = \sin x$ grafiką per $\frac{\pi}{2}$ *kairėn*:



Nubraižykite grafiką $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. Paaiškinkite, kaip, remiantis $y = \sin x$ grafiku, galima nubraižyti grafiką $y = \sin(x + a)$, kur a — skaičius.

75. Kokią didžiausią ir kokią mažiausią reikšmes įgyja funkcija:
a) $f(x) = 4 + \sin x$? b) $f(x) = \sin x - 1$? c) $f(x) = 2\sin x$?

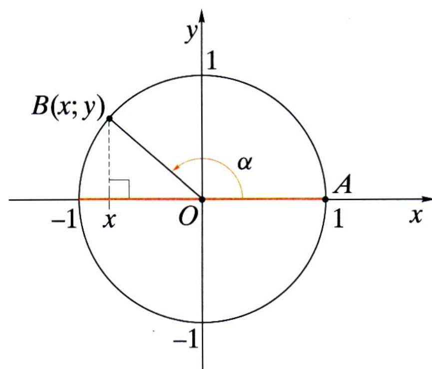
76. Pastebėta, kad potvynių ir atoslūgių metu jūros vandens lygio kitimo grafikas yra panašus į sinusoidę. Vandens aukščio pokytį h (metrais) galima apskaičiuoti remiantis formule $h(t) = 3\sin(\frac{\pi}{6} \cdot t)$; čia t — laikas valandomis. Pavyzdžiui, pradiniu laiko momentu $t = 0$, $h(0) = 3\sin(\frac{\pi}{6} \cdot 0) = 3\sin 0 = 0$; po 1 valandos $h(1) = 1{,}5$ (m). Po kiek mažiausiai laiko vandens lygis bus:
a) aukščiausias? b) žemiausias?

9.4. Kampo kosinusas. Funkcija $f(x) = \cos x$

Bet kokio kampo kosinusas

Koordinačių plokštumoje nubrėžkime apskritimą, kurio spindulys lygus 1, o centras — koordinačių pradžios taškas, ir pažymėkime tašką $A(1; 0)$.

Pasukus spindulį OA kampu α, taškas $A(1; 0)$ pereina į tašką $B(x; y)$. Taško B koordinatę x vadinsime kampo α ***kosinusu***.

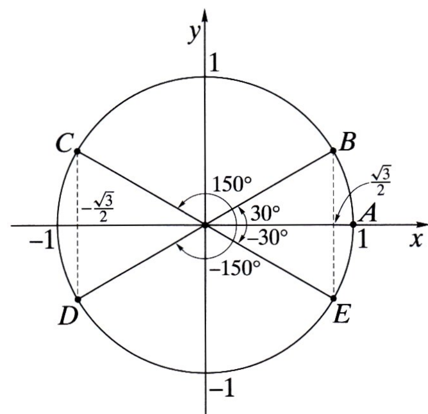


$$\cos\alpha = x$$

Iš brėžinio matome, kad $\cos\alpha$:

- apibrėžtas su visais α;
- įgyja reikšmes iš intervalo $[-1; 1]$.

Remdamiesi brėžiniu, nustatykime, kam lygu $\cos 30^\circ$:

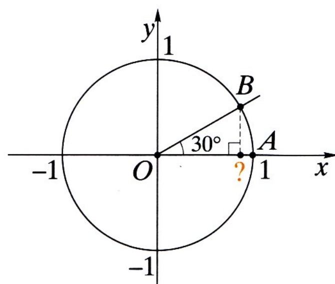


$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, nes taško B koordinatė $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Remdamiesi brėžiniu, pasakykite, kam lygu:

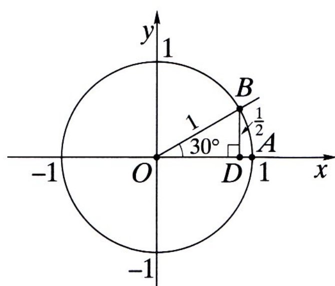
$\cos 150^\circ$, $\cos 210^\circ$, $\cos 330^\circ$, $\cos(-30^\circ)$, $\cos(-150^\circ)$, $\cos(-210^\circ)$, $\cos(-330^\circ)$.

UŽDAVINYS. Įrodykime, kad $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



Duota: $\angle AOB = 30^\circ$, $OA = 1$.
Rasti: $\cos 30^\circ = x_B$.

Sprendimas. Nagrinėkime statųjį $\triangle BDO$ ($\angle D = 90^\circ$), $OB = OA = 1$, $BD = \frac{1}{2}$ (statinis prieš 30° kampą lygus pusei įžambinės). Remdamiesi Pitagoro teorema, randame kito statinio ilgį:



$$OD^2 = OB^2 - BD^2,$$
$$OD^2 = 1^2 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2,$$
$$OD^2 = 1 - \tfrac{1}{4},$$
$$OD^2 = \tfrac{3}{4},$$
$$OD = \tfrac{\sqrt{3}}{2}.$$

Kadangi OD ilgis yra $\frac{\sqrt{3}}{2}$, o taškas B yra I ketvirtyje, tai taško B koordinatė $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Taigi

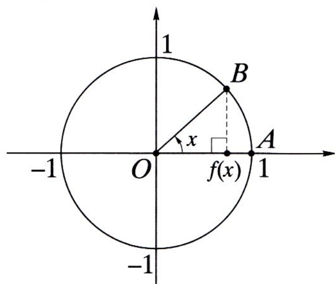
$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Paaiškinkite, kodėl $\cos(-30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Funkcija $f(x) = \cos x$

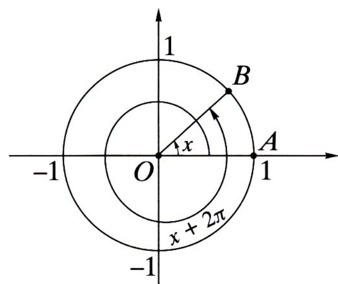
Iš kampo kosinuso apibrėžimo matome, kad $\cos x$ apibrėžtas su visais x ($x \in \boldsymbol{R}$) ir įgyja reikšmes iš intervalo $[-1; 1]$ ($\cos x \in [-1; 1]$).

Nagrinėkime funkciją $f(x) = \cos x$.



$f(x) = \cos x$,
$D_f = \boldsymbol{R}$ — apibrėžimo sritis,
$E_f = [-1; 1]$ — reikšmių sritis.

Nesunku pastebėti, kad su bet kuria x reikšme $\cos x = \cos(x + 2\pi)$, o su mažesnėmis nei $T = 2\pi$ reikšmėmis $\cos(x + T)$ reikšmės nekartoja $\cos x$ reikšmių.
Sakoma, kad funkcija $f(x) = \cos x$ yra *periodinė* su mažiausiu teigiamu periodu 2π.



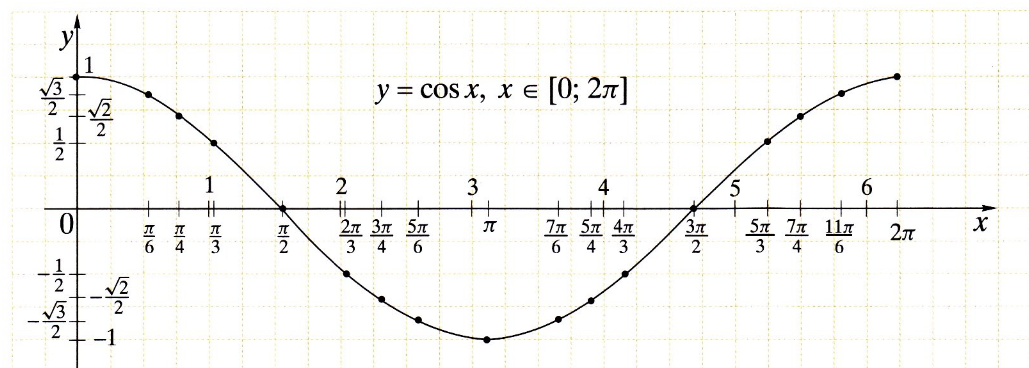
$$\cos x = \cos(x+2\pi)$$

Nubraižykime funkcijos $f(x) = \cos x$ grafiką intervale $[0; 2\pi]$.
Imkime patogias x reikšmes (tas, kurių kosinusus žinome) ir sudarykime reikšmių lentelę:

x (laipsniai)	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
x (radianai)	0	$\frac{\pi}{6} \approx 0,52$	$\frac{\pi}{4} \approx 0,79$	$\frac{\pi}{3} \approx 1,05$	$\frac{\pi}{2} \approx 1,57$	$\frac{2\pi}{3} \approx 2,09$	$\frac{3\pi}{4} \approx 2,36$	$\frac{5\pi}{6} \approx 2,62$	$\pi \approx 3,14$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,87$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,71$	$\frac{1}{2} = 0,5$	0	$-\frac{1}{2} = -0,5$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0,71$	$-\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0,87$	-1

x (laipsniai)	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
x (radianai)	$\frac{7\pi}{6} \approx 3,67$	$\frac{5\pi}{4} \approx 3,93$	$\frac{4\pi}{3} \approx 4,19$	$\frac{3\pi}{2} \approx 4,71$	$\frac{5\pi}{3} \approx 5,24$	$\frac{7\pi}{4} \approx 5,50$	$\frac{11\pi}{6} \approx 5,76$	$2\pi \approx 6,28$
$\cos x$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Atidėję koordinačių plokštumoje taškus $(x; \cos x)$, juos sujunkime glodžia kreive. Kuo daugiau taškų $(x; \cos x)$ imsime, tuo tikslesnį $y = \cos x$ grafiko vaizdą gausime.



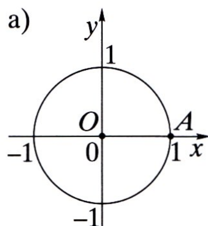
Nubraižykite funkcijos $f(x) = \cos x$ grafiką intervale: a) $[-2\pi; 0]$; b) $[2\pi; 4\pi]$.
Braižydami remkitės $y = \cos x$ grafiku intervale $x \in [0; 2\pi]$ ir tuo, kad funkcija $f(x) = \cos x$ yra periodinė, jos periodas yra 2π, t. y. $\cos x = \cos(x + 2\pi)$.

Pratimai ir uždaviniai

Bet kokio kampo kosinusas

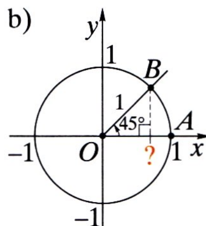
77. 1) Remdamiesi brėžiniu, nustatykite, kam lygūs nurodytų kampų kosinusai.

a)



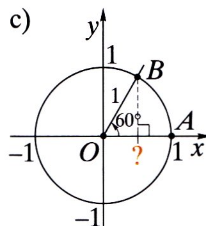
$\cos 0° = ?$
$\cos 360° = ?$
$\cos (-360°) = ?$
$\cos 720° = ?$
$\cos (-720°) = ?$

b)



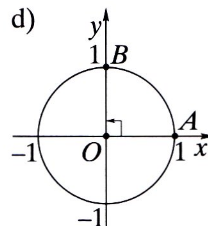
$\cos 45° = ?$
$\cos (-315°) = ?$
$\cos 405° = ?$
$\cos (-675°) = ?$
$\cos 765° = ?$

c)



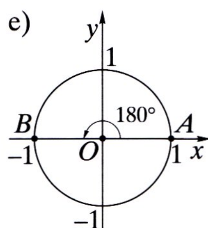
$\cos 60° = ?$
$\cos (-300°) = ?$
$\cos 420° = ?$
$\cos (-760°) = ?$
$\cos 780° = ?$

d)



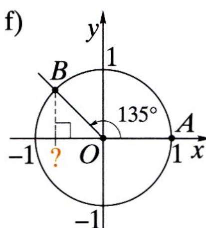
$\cos 90° = ?$
$\cos (-270°) = ?$
$\cos 450° = ?$
$\cos (-630°) = ?$
$\cos 810° = ?$

e)



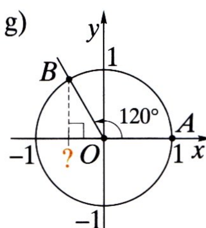
$\cos 180° = ?$
$\cos (-180°) = ?$
$\cos 540° = ?$
$\cos (-540°) = ?$

f)



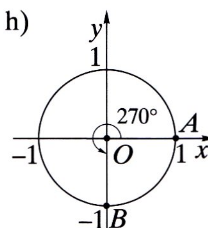
$\cos 135° = ?$
$\cos (-225°) = ?$
$\cos 495° = ?$
$\cos (-585°) = ?$

g)



$\cos 120° = ?$
$\cos (-240°) = ?$
$\cos 480° = ?$
$\cos (-600°) = ?$

h)



$\cos 270° = ?$
$\cos (-90°) = ?$
$\cos 630° = ?$
$\cos (-450°) = ?$



1) Pasižiūrėkite, kaip 49 psl. įrodyta, jog $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
2) Jei stačiojo trikampio vienas kampas lygus 45°, tai kitas kampas irgi lygus 45°, o trikampis yra lygiašonis.
3) Jei stačiojo trikampio vienas kampas lygus 60°, tai kitas kampas yra 30°. Statinis prieš 30° kampą lygus pusei įžambinės.

2) Pabaikite lygybes (lygybėse k yra sveikasis skaičius, t. y. $k \in \mathbf{Z}$).

$\cos(360° \cdot k) = \ldots$;
$\cos(60° + 360° \cdot k) = \ldots$;
$\cos(180° + 360° \cdot k) = \ldots$;
$\cos(120° + 360° \cdot k) = \ldots$;
$\cos(30° + 360° \cdot k) = \ldots$.
$\cos(45° + 360° \cdot k) = \ldots$;
$\cos(90° + 360° \cdot k) = \ldots$;
$\cos(135° + 360° \cdot k) = \ldots$;
$\cos(270° + 360° \cdot k) = \ldots$;

78. 1) Pabaikite sakinį.

a) Kampo x reikšmėms *didėjant* nuo $0°$ iki $90°$, tų kampų kosinusai, t. y. $\cos x$ reikšmės, *mažėja* nuo 1 iki ... .

b) Kampo x reikšmėms *didėjant* nuo $90°$ iki $180°$, tų kampų kosinusai, t. y. $\cos x$ reikšmės ... .

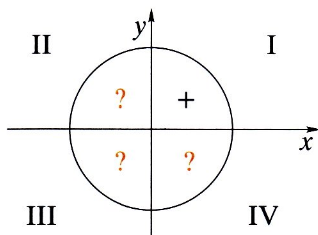
c) Kampo x reikšmėms *didėjant* nuo $180°$ iki $270°$, tų kampų kosinusai, t. y. $\cos x$ reikšmės ... .

d) Kampo x reikšmėms *didėjant* nuo $270°$ iki $360°$, tų kampų kosinusai, t. y. $\cos x$ reikšmės ... .

2) Neskaičiuodami kosinuso reikšmių, pasakykite, koks ženklas ($>$, $<$, $=$) turėtų būti parašytas vietoj kvadratėlio.

a) $\cos 1°$ ■ $\cos 2°$; b) $\cos 89°$ ■ $\cos 85°$; c) $\cos 90°$ ■ $\cos 91°$;
d) $\cos 185°$ ■ $\cos 209°$; e) $\cos 301°$ ■ $\cos 310°$;
f) $\cos(-15°)$ ■ $\cos(-16°)$; g) $\cos(-90°)$ ■ $\cos(-95°)$;
h) $\cos(-185°)$ ■ $\cos(-200°)$; i) $\cos(-273°)$ ■ $\cos(-360°)$;
j) $\cos 585°$ ■ $\cos 600°$; k) $\cos 1253°$ ■ $\cos 1255°$.

79. Kai kampas α yra I ketvirčio kampas, tai $\cos\alpha > 0$. Kitaip sakant, I ketvirčio kampų kosinusai yra teigiami:



1) Kokie II, III ir IV ketvirčio kampų kosinusai?

2) Kampas $\alpha \in (-90°; 90°)$. Koks ženklas ($>$, $<$) turėtų būti parašytas vietoj kvadratėlio: $\cos\alpha$ ■ 0?

3) Kampas $\beta \in (90°; 270°)$. Koks ženklas ($>$, $<$) turėtų būti parašytas vietoj kvadratėlio: $\cos\beta$ ■ 0?

80. 1) Žinoma, kad $\cos 5° \approx 0{,}996$. Kam lygu:
$\cos(-5°)$? $\cos 175°$? $\cos 185°$? $\cos(-175°)$? $\cos(-185°)$?

2) Žinoma, kad $\cos 89° \approx 0{,}017$. Kam lygu:
$\cos(-89°)$? $\cos 91°$? $\cos(-91°)$? $\cos 269°$? $\cos 271°$?

3) Žinoma, kad $\cos 170° \approx -0{,}985$. Kam lygu:
$\cos 190°$? $\cos 10°$? $\cos(-10°)$? $\cos(-170°)$? $\cos(-190°)$?

4) Kokių kampų $\alpha \in (0°; 360°)$ kosinusus galėtumėte pasakyti remdamiesi lygybe $\cos 320° \approx 0{,}766$?

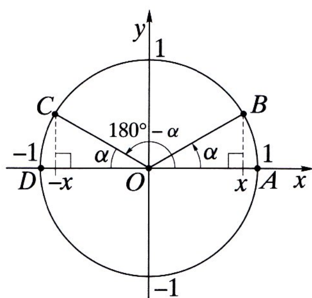
5) Įsitikinkite, kad:

a) $\cos\alpha = -\cos(180° - \alpha)$; b) $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$;

c) $\cos(90° + \alpha) = -\cos(90° - \alpha)$; d) $\cos(270° + \alpha) = -\cos(270° - \alpha)$;

e) $\cos(180° + \alpha) = \cos(180° - \alpha)$; f) $\cos(360° + \alpha) = \cos(360° - \alpha)$.





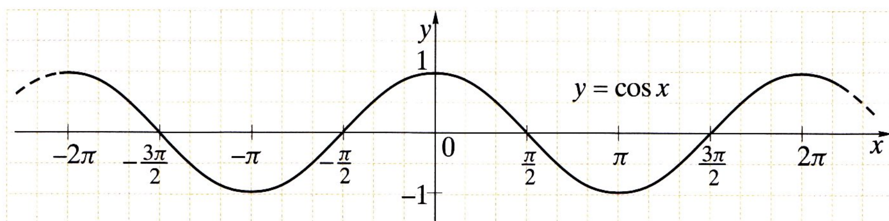
$\angle AOB = \alpha$,
$\angle COD = \alpha$,
$\angle AOC = 180° - \alpha$;
$\cos\angle AOC = -\cos\angle AOB$, t. y.
$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$.

6) Remdamiesi trigonometrinių funkcijų reikšmių lentele (žr. 199 psl.), parašykite, kam lygu:
a) $\cos 12°$, $\cos(-12°)$, $\cos 168°$, $\cos 192°$, $\cos 348°$;
b) $\cos 100°$, $\cos 260°$, $\cos 280°$, $\cos(-280°)$.

81. Pabaikite lygybes, kuriose kampų dydžiai nurodyti radianais.
a) $\cos 0 = \ldots$, $\cos\frac{\pi}{6} = \ldots$, $\cos\frac{\pi}{4} = \ldots$, $\cos\frac{\pi}{3} = \ldots$, $\cos\frac{\pi}{2} = \ldots$;
b) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \ldots$, $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \ldots$, $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \ldots$, $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \ldots$;
c) $\cos(-\pi) = \ldots$, $\cos(2\pi) = \ldots$, $\cos(4\pi) = \ldots$, $\cos(-2\pi) = \ldots$.

Funkcija $f(x) = \cos x$

82. 1) Remdamiesi kosinuso grafiku (jis dar vadinamas *kosinusoide*), parašykite intervalus, kuriuose funkcija $f(x) = \cos x$ yra: a) didėjanti; b) mažėjanti.



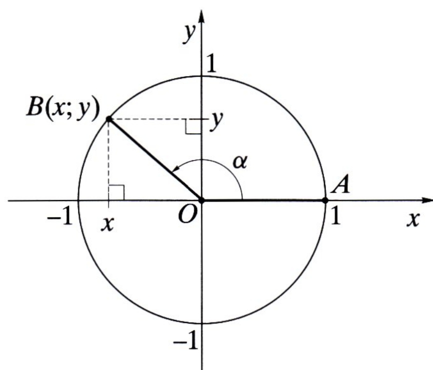
2) Pasakykite funkcijos $f(x) = \cos x$:
a) apibrėžimo sritį, reikšmių sritį;
b) x reikšmes, su kuriomis $f(x) = 0$; $f(x) = 1$; $f(x) = -1$.
3) Ar funkcijos $f(x) = \cos x$ grafikas:
a) yra simetriškas koordinačių pradžios taško (0; 0) atžvilgiu?
b) yra simetriškas ordinačių ašies Oy atžvilgiu?
c) turi simetrijos centrą? simetrijos ašį?
4) Ar teisinga lygybė: a) $\cos(x) = -\cos(-x)$? b) $\cos(x) = \cos(-x)$?
5) Ar funkcija $f(x) = \cos x$ yra:
a) lyginė? b) nelyginė? c) nei lyginė, nei nelyginė?
6) Ar funkcija $f(x) = \cos x$ yra: a) periodinė? b) neperiodinė?
7) Paaiškinkite, kaip, remiantis funkcijos $f(x) = \cos x$ grafiku, galima gauti grafikus funkcijų $g(x) = \cos x + 1$, $h(x) = \cos x - 2$, $l(x) = \cos(x - \pi)$, $m(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, $n(x) = \sin x$.

9.5. Kampo tangentas. Funkcija $f(x) = \operatorname{tg} x$

Bet kokio kampo tangentas

Koordinačių plokštumoje nubrėžkime apskritimą, kurio spindulys lygus 1, o centras — koordinačių pradžios taškas, ir pažymėkime tašką $A(1; 0)$.

Pasukus spindulį OA kampu α, taškas $A(1; 0)$ pereina į tašką $B(x; y)$. Taško B koordinačių y ir x santykį vadinsime kampo α ***tangentu***.



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$$

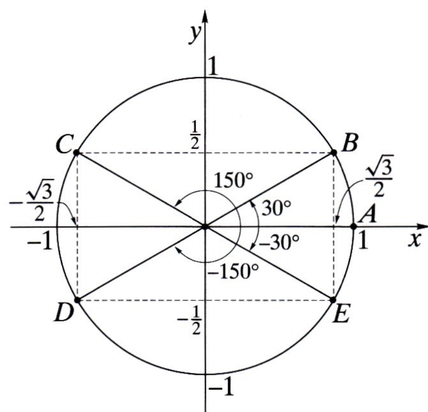
Kai $x = 0$, $\operatorname{tg} \alpha$ neapibrėžtas (juk dalyti iš 0 negalima).

Su kuriomis α reikšmėmis $\operatorname{tg} \alpha$ neapibrėžtas?

Pastebėkime, kad

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Remdamiesi brėžiniu, nustatykime, kam lygu $\operatorname{tg} 30°$.



Kadangi taško B koordinatės yra $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$, tai

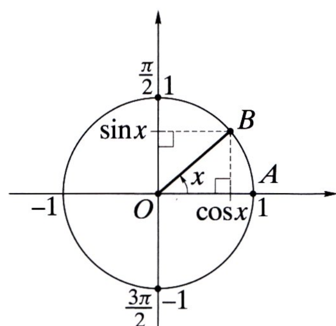
$$\operatorname{tg} 30° = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \\ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Remdamiesi brėžiniu, pasakykite, kam lygu:

$\operatorname{tg} 150°$, $\operatorname{tg} 210°$, $\operatorname{tg} 330°$, $\operatorname{tg}(-30°)$, $\operatorname{tg}(-150°)$, $\operatorname{tg}(-210°)$, $\operatorname{tg}(-330°)$.

Funkcija $f(x) = \operatorname{tg} x$

Iš kampo tangento apibrėžimo matome, kad $\operatorname{tg} x$ apibrėžtas su visais x, išskyrus $x = \ldots, -\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$



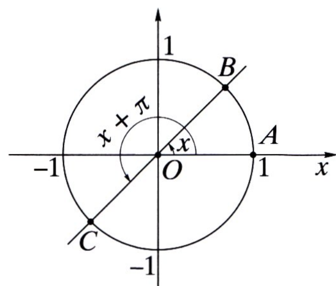
$f(x) = \operatorname{tg} x$ $(\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x})$,

$D_f = \boldsymbol{R}$, išskyrus $x = \pm\frac{\pi}{2}$, $x = \pm\frac{3\pi}{2}$, $x = \pm\frac{5\pi}{2}$, ...

Akivaizdu, kad su bet kuria x reikšme iš tangento apibrėžimo srities

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + 2\pi).$$

Įsitikinkite, kad tangentui teisinga tokia lygybė:



$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + \pi)$$

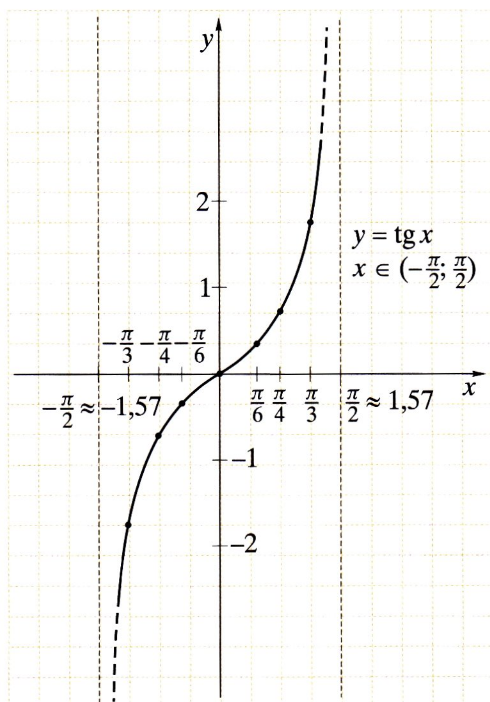
Nubraižykime $f(x) = \operatorname{tg} x$ grafiką intervale $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
Imkime patogias x reikšmes (tas, kurių sinusus ir kosinusus žinome) ir sudarykime funkcijos $f(x) = \operatorname{tg} x$ reikšmių lentelę:

x (laipsniai)	$-60°$	$-45°$	$-30°$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$
x (radianai)	$-\frac{\pi}{3} \approx -1{,}05$	$-\frac{\pi}{4} \approx -0{,}79$	$-\frac{\pi}{6} \approx -0{,}52$	0	$\frac{\pi}{6} \approx 0{,}52$	$\frac{\pi}{4} \approx 0{,}79$	$\frac{\pi}{3} \approx 1{,}05$
$\operatorname{tg} x$	$-\sqrt{3} \approx -1{,}73$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3} \approx -0{,}58$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}58$	1	$\sqrt{3} \approx 1{,}73$

Panagrinėję tangento reikšmių lentelę (199 psl.), pasakykite, kaip kinta $\operatorname{tg} x$ reikšmės, kai:

- x reikšmės didėja, vis artėdamos prie $\frac{\pi}{2}$ $(90°)$;
- x reikšmės mažėja, vis artėdamos prie $-\frac{\pi}{2}$ $(-90°)$.

Atidėję koordinačių plokštumoje taškus $(x; \operatorname{tg} x)$, juos sujunkime glodžia kreive. Kuo daugiau taškų $(x; \operatorname{tg} x)$ imsime, tuo tikslesnį $y = \operatorname{tg} x$ grafiko vaizdą gausime.

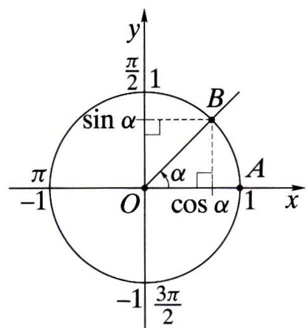


Nubraižykite funkcijos $f(x) = \operatorname{tg} x$ grafiką intervale:
a) $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$; b) $\left(-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right)$.

Pratimai ir uždaviniai

Bet kokio kampo tangentas

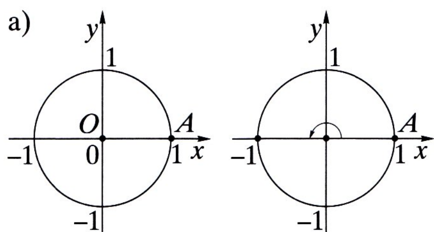
83. Paaiškinkite, kodėl neapibrėžtas $\operatorname{tg} \alpha$, kai
$\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, $\alpha = \frac{5\pi}{2}$, $\alpha = \frac{7\pi}{2}$, ...,
$\alpha = -\frac{\pi}{2}$, $\alpha = -\frac{3\pi}{2}$, $\alpha = -\frac{5\pi}{2}$, $\alpha = -\frac{7\pi}{2}$, ...



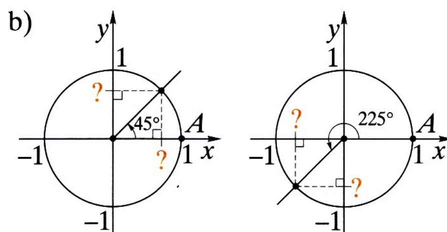
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

84. 1) Remdamiesi brėžiniu, nustatykite, kam lygūs nurodytų kampų tangentai.

a)

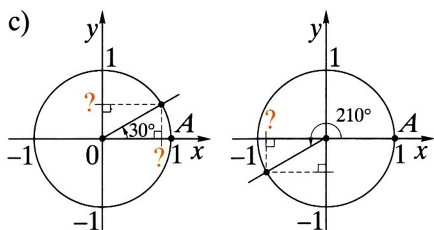


b)

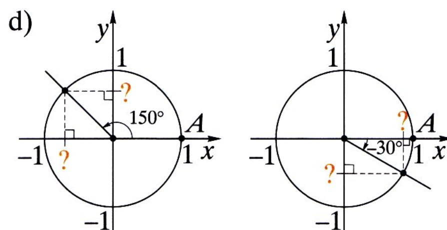


tg 0° = ?	tg 180° = ?	tg 45° = ?	tg 225° = ?
tg 360° = ?	tg 540° = ?	tg (–315°) = ?	tg (–135°) = ?
tg (–360°) = ?	tg (–180°) = ?	tg 405° = ?	tg 585° = ?
tg 720° = ?	tg (–540°) = ?	tg (–675°) = ?	tg (–495°) = ?
tg (–720°) = ?	tg 900° = ?	tg 765° = ?	tg 945° = ?

c)



d)



tg 30° = ?	tg 210° = ?	tg 150° = ?	tg (–30°) = ?
tg (–330°) = ?	tg (–150°) = ?	tg (–210°) = ?	tg 330° = ?
tg 390° = ?	tg 570° = ?	tg 510° = ?	tg (–390°) = ?
tg (–690°) = ?	tg (–510°) = ?	tg (–570°) = ?	tg 690° = ?

2) Pabaikite lygybes (lygybėse k yra sveikasis skaičius, $k \in \boldsymbol{Z}$).

$\operatorname{tg}(180^\circ \cdot k) = \ldots;$ $\quad\operatorname{tg}(30^\circ + 180^\circ \cdot k) = \ldots;$

$\operatorname{tg}(45^\circ + 180^\circ \cdot k) = \ldots;$ $\quad\operatorname{tg}(60^\circ + 180^\circ \cdot k) = \ldots;$

$\operatorname{tg}(120^\circ + 180^\circ \cdot k) = \ldots;$ $\quad\operatorname{tg}(135^\circ + 180^\circ \cdot k) = \ldots;$

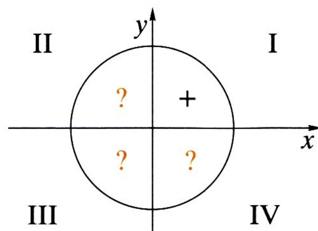
$\operatorname{tg}(150^\circ + 180^\circ \cdot k) = \ldots;$ $\quad\operatorname{tg}(210^\circ + 180^\circ \cdot k) = \ldots;$

$\operatorname{tg}(225^\circ + 180^\circ \cdot k) = \ldots;$ $\quad\operatorname{tg}(240^\circ + 180^\circ \cdot k) = \ldots;$

$\operatorname{tg}(300^\circ + 180^\circ \cdot k) = \ldots;$ $\quad\operatorname{tg}(315^\circ + 180^\circ \cdot k) = \ldots;$

$\operatorname{tg}(330^\circ + 180^\circ \cdot k) = \ldots.$

85. Kai $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$, tai $\operatorname{tg}\alpha > 0$.



Kokie II, III ir IV ketvirčio kampų tangento ženklai?

86. 1) Pabaikite sakinį.

a) Kampo x reikšmėms *didėjant* nuo $-90°$ iki $90°$, tų kampų tangentai, t. y. $\operatorname{tg} x$ reikšmės ... .

b) Kampo x reikšmėms *didėjant* nuo $90°$ iki $270°$, $\operatorname{tg} x$ reikšmės ... .

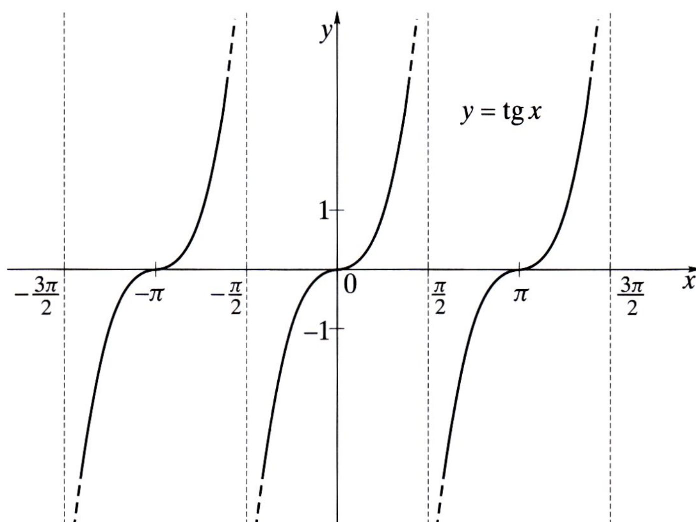
2) Neskaičiuodami tangento reikšmių, pasakykite, koks ženklas (>, <, =) turėtų būti parašytas vietoj kvadratėlio.

a) $\operatorname{tg} 15° \blacksquare \operatorname{tg} 16°$;
b) $\operatorname{tg}(-15°) \blacksquare \operatorname{tg}(-16°)$;
c) $\operatorname{tg} 89° \blacksquare \operatorname{tg}(-89°)$;
d) $\operatorname{tg} 121° \blacksquare \operatorname{tg} 211°$;
e) $\operatorname{tg}(-100°) \blacksquare \operatorname{tg} 259°$;
f) $\operatorname{tg} 135° \blacksquare \operatorname{tg}(-405°)$.

87. Pabaikite lygybes, kuriose kampų dydžiai nurodyti radianais.
$\operatorname{tg} 0 = \dots$; $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \dots$; $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \dots$; $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \dots$.

Funkcija $f(x) = \operatorname{tg} x$

88. 1) Remdamiesi tangento grafiku, pasakykite funkcijos $f(x) = \operatorname{tg} x$:
a) apibrėžimo sritį; b) reikšmių sritį; c) reikšmių didėjimo (mažėjimo) intervalus; d) x reikšmes, su kuriomis $f(x) = 0$; $f(x) > 0$; $f(x) < 0$.



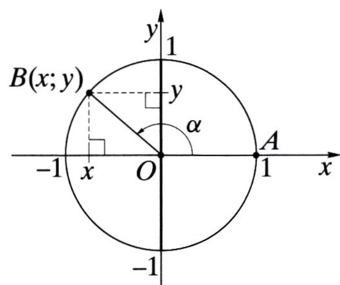
2) Ar funkcijos $f(x) = \operatorname{tg} x$ grafikas:
a) yra simetriškas koordinačių pradžios taško (0; 0) atžvilgiu?
b) yra simetriškas ordinačių ašies Oy atžvilgiu?
c) turi simetrijos centrą? simetrijos ašį?

3) Ar teisinga lygybė:
a) $\operatorname{tg}(x) = -\operatorname{tg}(-x)$? b) $\operatorname{tg}(x) = \operatorname{tg}(-x)$?

4) Ar funkcija $f(x) = \operatorname{tg} x$ yra:
a) lyginė? b) nelyginė? c) nei lyginė, nei nelyginė?

5) Ar funkcija $f(x) = \operatorname{tg} x$ yra:
a) periodinė? b) neperiodinė?

89. Panašiai kaip tg α apibrėžiamas kampo α *kotangentas*, t. y. ctg α:



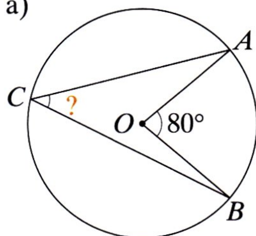
$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$$

1) tg α neapibrėžtas, kai $x = 0$, t. y. kai $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k$ ($k \in \boldsymbol{Z}$). Su kuriais α neapibrėžtas ctg α?
2) Raskite ctg 30°; ctg 45°; ctg 60°; ctg 90°; ctg 120°; ctg 135°; ctg 150°.
3) Nubraižykite $y = \operatorname{ctg} x$ grafiką intervale $x \in (0; \pi)$.
4) Įsitikinkite, kad teisinga lygybė

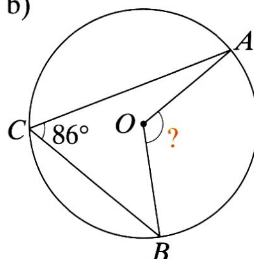
$$\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}(x + \pi k), \quad k \in \boldsymbol{Z}.$$

90. Kam lygus klaustuku pažymėto kampo dydis?

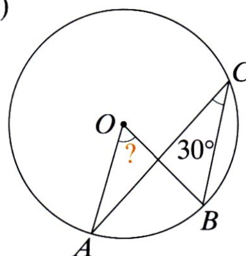
a)



b)

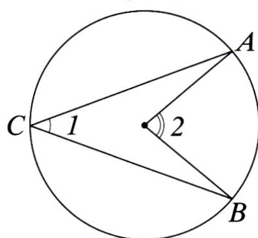


c)





Kampas, kurio viršūnė yra apskritimo centre, vadinamas *centriniu* kampu. Kampas, kurio viršūnė yra ant apskritimo, o kraštinės kerta apskritimą, vadinamas *įbrėžtiniu* kampu.



Įbrėžtinio kampo dydis lygus pusei jį atitinkančio centrinio kampo dydžio:

$$\angle 1 = \frac{\angle 2}{2}.$$

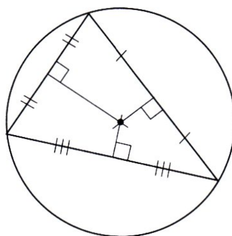
91. Apie statųjį trikampį ABC (AB, AC — statiniai) apibrėžtas apskritimas, kurio centras O. Apskaičiuokite OA, jei:

a) $OB = 3\,\text{cm}$; b) $AB = 3\,\text{cm}$; $AC = 4\,\text{cm}$;

c) $AB = AC = 10\,\text{cm}$; d) $AC = 2\,\text{cm}$; $\angle B = 30°$.

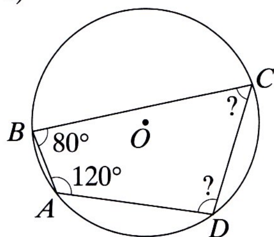


Apskritimas vadinamas *apibrėžtu* apie trikampį, jei jis eina per visas trikampio viršūnes. Apibrėžto apie trikampį apskritimo centras yra trikampio kraštinių *vidurio statmenų* susikirtimo taškas.

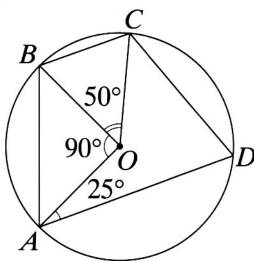


92. Keturkampis $ABCD$ įbrėžtas į apskritimą, kurio centras O. Apskaičiuokite to keturkampio kampų dydžius.

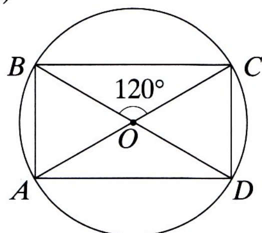
a)



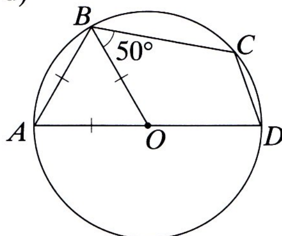
b)



c)

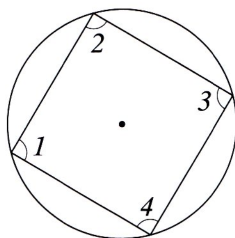


d)





Keturkampis vadinamas *įbrėžtu* į apskritimą, jei visos to keturkampio viršūnės yra apskritimo taškai.
Jei keturkampio priešingųjų kampų dydžių suma lygi 180 laipsnių, tai apie tą keturkampį galima apibrėžti apskritimą.

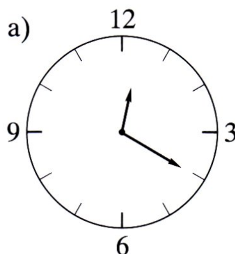


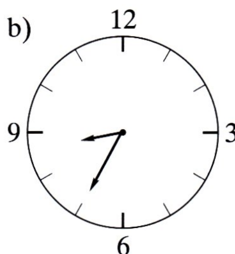
$\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4 = 180°$

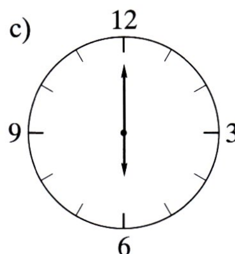
Ne apie kiekvieną keturkampį galima apibrėžti apskritimą.
Pavyzdžiui, apie kvadratą, apie stačiakampį apibrėžti apskritimą galima, o apie rombą, kuris nėra kvadratas, apibrėžti apskritimo negalima.

9.7. Pasitikrinkime

93. Laikrodis rodo:

a) 

b) 

c) 

1) Kokiu mažiausiu laipsnių kampu reikia pasukti minutinę rodyklę, kad laikrodis rodytų:
   a) atveju — 12:40, pasukus rodyklę pirmyn?
   b) atveju — 17:55, pasukus rodyklę atgal?
   c) atveju — 15:02, pasukus rodyklę pirmyn?
2) Kokiu laipsnių kampu pasisuko valandinė rodyklė?
3) Kokį kelią centimetrais kiekvienu atveju nuėjo minutinės ir valandinės rodyklių galai, jei minutinės rodyklės ilgis lygus 2 cm, o valandinės rodyklės ilgis 1,5 cm?
4) Kokiu radianų kampu pasisuko minutinė ir valandinė rodyklės?

94. Koordinačių plokštumoje pažymėta atkarpa OA. Jos galų koordinatės yra $O(0;\ 0)$, $A(0;\ 1)$. Atkarpą OA pasukus apie tašką O:
a) 30°; b) -45°; c) 90°; d) -180°; e) 120° kampu,
taškas A perėjo į A'.
1) Kokios taško A' koordinatės?
2) Kam lygus posūkio kampo sinusas, kosinusas ir tangentas, t. y. $\sin\angle AOA'$, $\cos\angle AOA'$, $\operatorname{tg}\angle AOA'$?

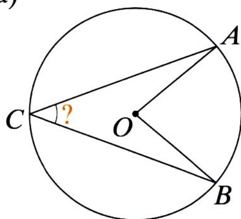
95. Paaiškinkite, kodėl:
a) $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$; $\cos(-30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$;
b) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$.

96. a) Koks kampo α dydis radianais, jei jo dydis laipsniais yra:
0°? 15°? -30°? -45°? 60°?
b) Koks kampo α dydis laipsniais, jei jo dydis radianais yra:
0? $\frac{\pi}{6}$? $\frac{2\pi}{5}$? 1? 10?

97. Nubraižykite funkcijos $y = f(x)$ grafiką ir išvardykite jos savybes.
a) $f(x) = \sin x$; b) $f(x) = \cos x$; c) $f(x) = \operatorname{tg} x$.

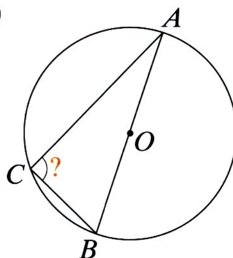
98. Kas turėtų būti parašyta vietoj klaustukų?

a)



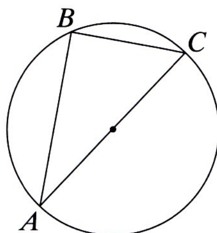
$\angle AOB$ – status,
$\angle ACB$ – ?

b)



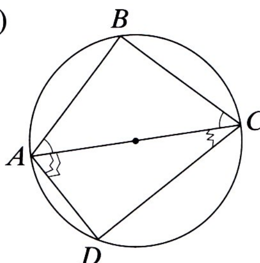
$\angle AB$ – skersmuo,
$\angle ACB$ – ?

c)



AC – skersmuo,
$\angle BCA = 60°$,
$BC = 2$ cm,
$AC =$? cm, $AB =$? cm

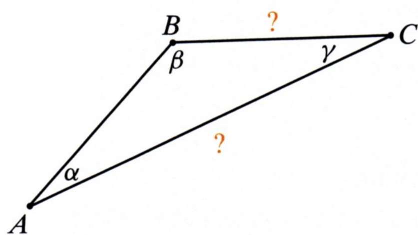
d)



$AC = 4$ cm – skersmuo,
$\angle BAC = \angle BCA$,
$\angle CAD = 2\angle ACD$,
$P_{ABCD} =$? cm

Kaip nustatyti atstumą tarp neprieinamų objektų?

Pasibaigus viduramžiams, Europa sujudo: suskato tyrinėti, keliauti, prekiauti ir kariauti... Prireikė tikslių žemėlapių. Tikslių žemėlapių nesudarysi tiksliai neišmatavęs atstumų. XVII amžiuje atstumai buvo nustatomi *trianguliacijos* metodu.



$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$$
$$\sin\gamma = \sin\big(180^\circ - (\alpha + \beta)\big)$$
$$\sin\gamma = \sin(\alpha + \beta)$$

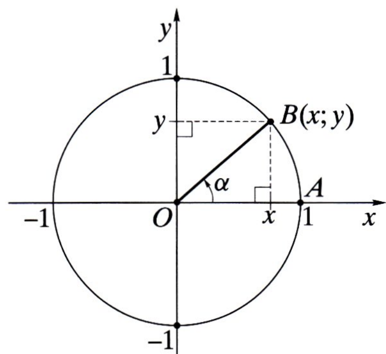
Jei taškai A ir B yra lygioje vietoje ir atstumas AB yra žinomas, tai atstumus BC ir AC galima apskaičiuoti taip:

1) Išmatuojame kampų α ir β dydžius.
2) Iš lygybės
$$\frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{AB}{\sin\gamma}$$
randame BC:
$$BC = \frac{AB \cdot \sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}.$$
3) Iš lygybės
$$\frac{AC}{\sin\beta} = \frac{AB}{\sin\gamma}$$
randame AC:
$$AC = \frac{AB \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

10 TRIGONOMETRIJOS TAIKYMAI

10.1. Trigonometrinės tapatybės

Prisiminkime, kaip apibrėžėme kampo α trigonometrines funkcijas:



$\sin\alpha = y,$

$\cos\alpha = x,$

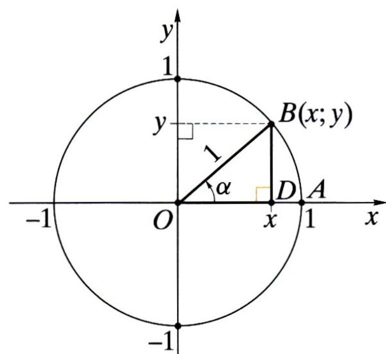
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x},$ kai $x \neq 0.$

Iš šių apibrėžimų išplaukia, kad

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \text{kai } \cos\alpha \neq 0 \ (\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z})$$

1 užduotis. Apskaičiuokite, kam lygu $\operatorname{tg}\alpha$, kai $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Panagrinėkime statųjį $\triangle ODB$:



$\triangle ODB$ — status ($\angle D = 90^\circ$),

$\angle BOD = \alpha,$

$OB = 1.$

Statinio BD ilgis lygus $\sin\alpha$ (paaiškinkite kodėl).
Statinio OD ilgis lygus $\cos\alpha$ (paaiškinkite kodėl).

$\triangle ODB$ taikome Pitagoro teoremą:

$$BD^2 + OD^2 = OB^2,$$

$$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1^2.$$

Pastaba. Sinuso, kosinuso, tangento kvadratą, t. y. $(\sin\alpha)^2$, $(\cos\alpha)^2$, $(\operatorname{tg}\alpha)^2$, galima rašyti ir taip:

$$(\sin\alpha)^2 = \sin^2\alpha, \quad (\cos\alpha)^2 = \cos^2\alpha, \quad (\operatorname{tg}\alpha)^2 = \operatorname{tg}^2\alpha.$$

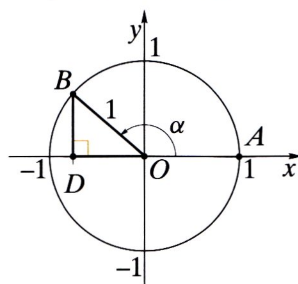
To paties kampo α sinusas ir kosinusas susiję lygybe

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Ši lygybė dažnai vadinama pagrindine trigonometrine tapatybe.

2 užduotis. Pagrindinė trigonometrinė tapatybė yra teisinga, kai α yra bet kuris kampas. Įsitikinkite tuo nagrinėdami statųjį trikampį ODB.

1) $\alpha \in$ II ketvirčiui



$BD = \sin\alpha$

$OD = -\cos\alpha$

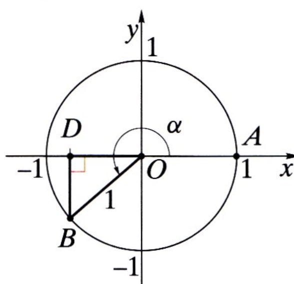
$OB = 1$

$BD^2 + OD^2 = 1^2$

$(\sin\alpha)^2 + (-\cos\alpha)^2 = 1^2$

......

2) $\alpha \in$ III ketvirčiui

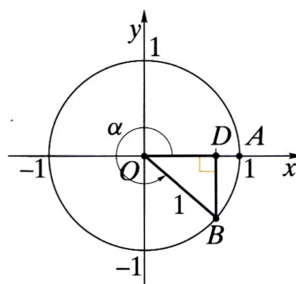


$BD = -\sin\alpha$

$OD = -\cos\alpha$

......

3) $\alpha \in$ IV ketvirčiui



$BD = \ldots$

$OD = \ldots$

......

3 užduotis. Įrodykite, kad teisinga tapatybė

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

Iš tikrųjų:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = 1 + \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 = 1 + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \ldots.$$

Pabaikite įrodymą.

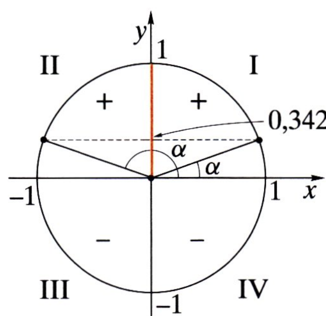
Pratimai ir uždaviniai

99. Nustatykite, kurio ketvirčio yra kampas α, ir apskaičiuokite $\operatorname{tg}\alpha$, kai:
a) $\sin\alpha = 0{,}423$, $\cos\alpha = 0{,}906$;
b) $\sin\alpha = 0{,}996$, $\cos\alpha = 0{,}087$;
c) $\sin\alpha = -0{,}259$, $\cos\alpha = 0{,}966$;
d) $\sin\alpha = 0{,}940$, $\cos\alpha = -0{,}342$;
e) $\sin\alpha = -0{,}574$, $\cos\alpha = -0{,}819$.



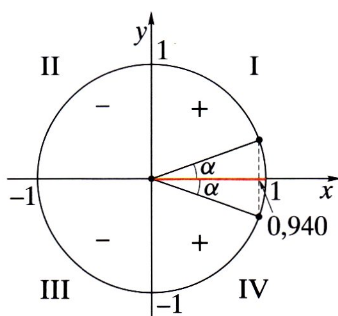
Apskaičiuokime $\operatorname{tg}\alpha$, kai $\sin\alpha = 0{,}342$, $\cos\alpha = 0{,}940$.

1) Kadangi $\sin\alpha = 0{,}342 > 0$, tai α yra I arba II ketvirčio kampas.



Sinuso ženklai ketvirčiuose

2) Kadangi $\cos\alpha = 0{,}940 > 0$, tai α yra I arba IV ketvirčio kampas.



Kosinuso ženklai ketvirčiuose

3) Vadinasi, α yra I ketvirčio kampas, nes ir sinusas, ir kosinusas yra teigiami tik pirmojo ketvirčio kampų.

4) Apskaičiuojame $\operatorname{tg}\alpha$ reikšmę:
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}342}{0{,}940} \approx 0{,}364$.

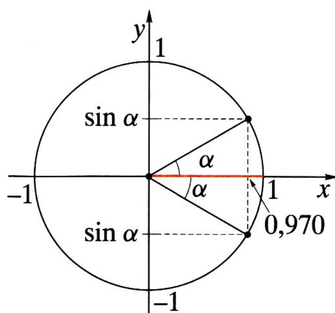
Atsakymas. $\operatorname{tg}\alpha \approx 0{,}364$, α yra I ketvirčio kampas.

100. Apskaičiuokite $\sin\alpha$, kai:
a) $\cos\alpha = 0{,}985$; b) $\cos\alpha = 0{,}766$; c) $\cos\alpha = -0{,}970$; d) $\cos\alpha = -0{,}070$.
Kuriame ketvirtyje yra kampas α?



Apskaičiuokime $\sin\alpha$, kai $\cos\alpha = 0{,}970$.

1) Kampas α yra I arba IV ketvirčio kampas, nes $\cos\alpha > 0$.



Jei α yra I ketvirčio, tai $\sin\alpha > 0$.
Jei α yra IV ketvirčio, tai $\sin\alpha < 0$.

2) Remdamiesi formule $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, apskaičiuojame $\sin\alpha$:
$\sin^2\alpha + 0{,}97^2 = 1$,
$\sin^2\alpha = 1 - 0{,}9409$,
$\sin^2\alpha = 0{,}0591$.
Jei α yra I ketvirčio kampas, tai $\sin\alpha = \sqrt{0{,}0591} \approx 0{,}243$.
Jei α yra IV ketvirčio kampas, tai $\sin\alpha = -\sqrt{0{,}0591} \approx -0{,}243$.

101. Apskaičiuokite $\cos\alpha$, kai:
a) $\sin\alpha = 0{,}766$; b) $\sin\alpha = 0{,}985$; c) $\sin\alpha = -0{,}087$; d) $\sin\alpha = -0{,}906$.
Kuriame ketvirtyje yra kampas α?

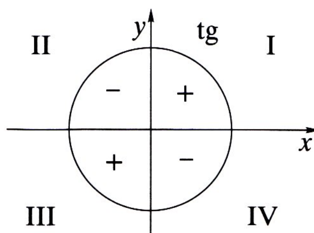
102. Apskaičiuokite $\cos\alpha$, kai:

a) $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}675$; b) $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}966$; c) $\operatorname{tg}\alpha = 4{,}331$;
d) $\operatorname{tg}\alpha = 28{,}636$; e) $\operatorname{tg}\alpha = -0{,}325$; f) $\operatorname{tg}\alpha = -2{,}050$.



Apskaičiuokime $\cos\alpha$, kai $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}466$.

1) Kadangi $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}466 > 0$, tai α yra I arba III ketvirčio kampas.



Jei α yra I ketvirtyje, tai $\cos\alpha > 0$.
Jei α yra III ketvirtyje, tai $\cos\alpha < 0$.

2) Remdamiesi formule $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, apskaičiuojame $\cos\alpha$:
$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + 0{,}466^2$, $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1{,}217156$,
$\cos^2\alpha = \frac{1}{1{,}217156}$, $\cos^2\alpha \approx 0{,}821587373$,
Jei α yra I ketvirčio kampas, tai $\cos\alpha = \sqrt{0{,}821587373} \approx 0{,}906$.
Jei α yra III ketvirčio kampas, tai $\cos\alpha = -\sqrt{0{,}821587373} \approx -0{,}906$.

103. Ar yra toks kampas α, kad:

a) $\sin\alpha = \frac{3}{4}$, o $\cos\alpha = \frac{1}{5}$?

b) $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$, o $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$?

c) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$, o $\sin\alpha = \frac{3}{5}$?

Jei toks kampas α yra, tai kuriam ketvirčiui jis priklauso?

104. Suprastinkite reiškinį.

a) $1 + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$;

b) $\sin\alpha - \sin\alpha\cos^2\alpha$;

c) $\sin^2\alpha\cos\alpha + \cos^3\alpha$;

d) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 2\sin\alpha\cos\alpha$;

e) $\cos^2\alpha + \cos^2\alpha\operatorname{tg}^2\alpha$;

f) $\operatorname{tg}^2\alpha - \frac{1}{\cos^2\alpha}$;

g) $1 - \cos^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$;

h) $(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)\cdot\cos^2\alpha$;

i) $1 - \sin^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$;

j) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$.

105. Įrodykite, kad teisinga lygybė.

a) $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$;

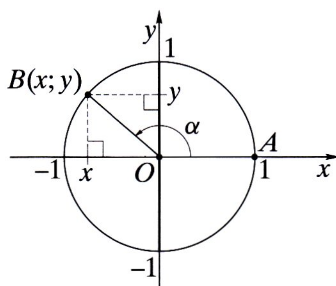
b) $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$;

c) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = -\operatorname{tg}^2\alpha$;

d) $\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;

e) $(a\sin\alpha + b\cos\alpha)^2 + (b\sin\alpha - a\cos\alpha)^2 = a^2 + b^2$.

106. Panašiai kaip $\operatorname{tg}\alpha$ apibrėžiamas kampo α *kotangentas*, t. y. $\operatorname{ctg}\alpha$:



$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$, kai $y \neq 0$

Įrodykite, kad teisingos tokios formulės:

a) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$; b) $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha = 1$; c) $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$.

10.2. Lygtis $\sin x = a$

Mes jau mokėmės spręsti įvairias lygtis, pavyzdžiui:

$2x = 8$	$x^2 = 16$	$\frac{2}{x} = 4$	$\log_2 x = 3$
$x = 4$, nes	$x_1 = -4$, $x_2 = 4$, nes	$x = \frac{1}{2}$, nes	$x = 8$, nes
$2 \cdot 4 = 8$;	$(-4)^2 = 16$ ir $4^2 = 16$;	$2 : \frac{1}{2} = 4$;	$\log_2 8 = 3$.

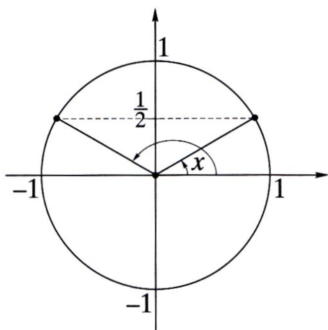
Išspręsti lygtį — reiškia rasti visas nežinomojo reikšmes, su kuriomis lygtis virsta teisinga lygybe.

Raskime tas x reikšmes, su kuriomis būtų teisinga lygybė

$$\sin x = \frac{1}{2}.$$

Pirmiausia raskime x reikšmes, tenkinančias lygybę $\sin x = \frac{1}{2}$ ir priklausančias intervalui

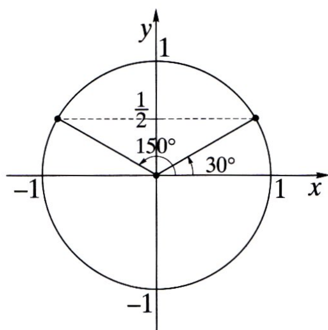
$$[0°; 360°].$$



Reikia rasti dydžius tų kampų x, kurių sinusai lygūs $\frac{1}{2}$.

Iš brėžinio matome, kad intervale $[0°; 360°]$ yra du kampai, kurių sinusai lygūs $\frac{1}{2}$:

$$x_1 = 30°, \quad x_2 = 150°.$$



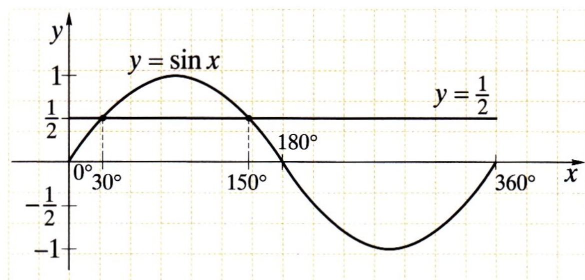
Iš tikrųjų:

$$\sin 30° = \frac{1}{2}, \quad \sin 150° = \frac{1}{2}.$$

Lygties

$$\sin x = \frac{1}{2}, \quad x \in [0°; 360°],$$

sprendinius galima pavaizduoti geometriškai — nubraižius funkcijų $f(x) = \sin x$ ir $g(x) = \frac{1}{2}$ grafikus: sinusoidės ir tiesės bendrų taškų x koordinatės (abscisės) yra lygties $\sin x = \frac{1}{2}$ sprendiniai.



$\sin x = \frac{1}{2}$, $x \in [0°; 360°]$;

$x_1 = 30°$, $x_2 = 150°$.

Kadangi sinusas yra periodinė funkcija su mažiausiu teigiamu periodu 360°, t. y.

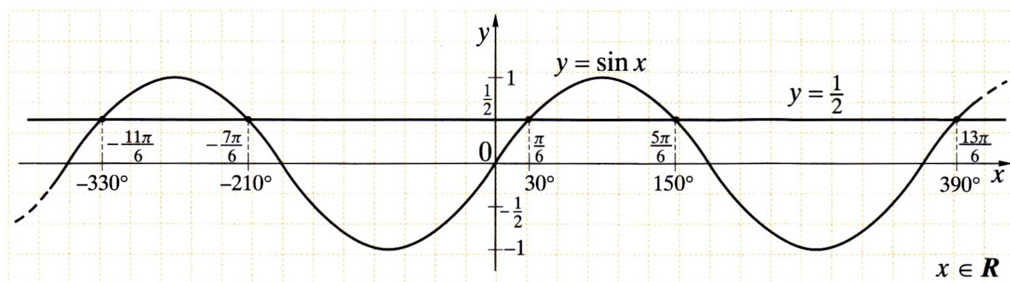
$$\sin x = \sin(x + 360°),$$

tai lygties

$$\sin x = \frac{1}{2}, \quad x \in \boldsymbol{R},$$

sprendinius galima užrašyti taip:

$$x_1 = 30° + 360° \cdot k,\ k \in \boldsymbol{Z}; \qquad x_2 = 150° + 360° \cdot m,\ m \in \boldsymbol{Z}.$$



Pastaba. Dažniausiai trigonometrinių lygčių atsakymai rašomi ne laipsniais, bet radianais. Kadangi 30° lygu $\frac{\pi}{6}$ radianų, 150° lygu $\frac{5\pi}{6}$, 360° lygu 2π, tai

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}; \qquad x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in \boldsymbol{Z}.$$


Raskite lygties $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$:
a) sprendinius, priklausančius intervalui $x \in [0°; 360°]$;
b) visus sprendinius.
Punkto b) atsakymus parašykite ir laipsniais, ir radianais.

Pratimai ir uždaviniai

107. Raskite lygties:
1) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\sin x = -\frac{1}{2}$
sprendinius intervale:
a) $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; b) $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$; c) $x \in [0; \pi]$;
d) $x \in [2\pi; 4\pi]$; e) $x \in (-\infty; +\infty)$.
Lygties sprendinius užrašykite ir laipsniais, ir radianais.

108. Išspręskite lygtį.
a) $\sin x = 0$; b) $\sin x = 1$; c) $\sin x = -1$.

109. Lygties sprendinius pavaizduokite grafiškai.
a) $\sin x = -\frac{1}{2}$, $x \in [0; 2\pi]$; b) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in [-2\pi; 2\pi]$.

110. Ar su visomis a reikšmėmis lygtis $\sin x = a$ turi sprendinių? Paaiškinkite nusibraižę funkcijų $f(x) = \sin x$ ir $g(x) = a$ grafikus.

111. Lygties
$\sin x = a \quad (-1 \leqslant a \leqslant 1)$
sprendinį, *priklausantį intervalui*
$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$,
vadinsime skaičiaus a *arksinusu* ir žymėsime $\arcsin a$. Pavyzdžiui,
$$\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}, \quad \text{nes} \quad \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \quad \text{ir} \quad \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$
1) Raskite $\arcsin a$, kai a lygu:
$\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 1, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, -1, -2, 0.
2) Ar teisinga lygybė:
$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$? $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\pi}{4}$?

112. Naudojantis arksinuso žymeniu, lygties
$\sin x = a \quad (-1 \leqslant a \leqslant 1)$
sprendinius galima užrašyti taip:
$$x = (-1)^k \arcsin a + k\pi, \quad k \in \boldsymbol{Z}$$
Pavyzdžiui, lygties
$$\sin x = \frac{1}{2}$$
sprendiniai yra
$$x = (-1)^k \arcsin\frac{1}{2} + k\pi = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \boldsymbol{Z}.$$

Iš tikrųjų:

- kai $k = 0$, tai

$$x = (-1)^0 \cdot \frac{\pi}{6} + 0 \cdot \pi = 1 \cdot \frac{\pi}{6} + 0 = \frac{\pi}{6};$$

- kai $k = 1$, tai

$$x = (-1)^1 \cdot \frac{\pi}{6} + 1 \cdot \pi = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6};$$

- kai $k = 2$, tai

$$x = (-1)^2 \cdot \frac{\pi}{6} + 2 \cdot \pi = \frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6};$$

- kai $k = -1$, tai

$$x = (-1)^{-1} \cdot \frac{\pi}{6} + (-1) \cdot \pi = \frac{1}{(-1)^1} \cdot \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{7\pi}{6};$$

- kai $k = -2$, tai

$$x = (-1)^{-2} \cdot \frac{\pi}{6} + (-2) \cdot \pi = \frac{1}{(-1)^2} \cdot \frac{\pi}{6} - 2\pi = \frac{\pi}{6} - 2\pi = -\frac{11\pi}{6};$$

ir t. t.

Naudodamiesi lygties $\sin x = a$ sprendinių formule

$x = (-1)^k \cdot \arcsin a + k \cdot \pi, \quad k \in \boldsymbol{Z},$

užrašykite sprendinius lygties:

a) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $\sin x = 1$;
d) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; e) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; f) $\sin x = -1$;
g) $\sin x = 0$.

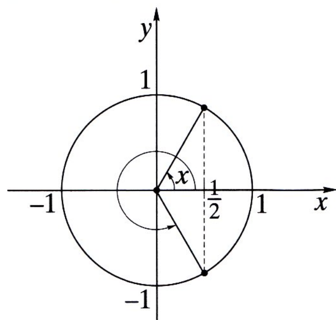
113. Išspręskite lygtį.
a) $2 \sin x = 0$; b) $2 \sin x = 1$; c) $3 \sin x = 6$.

10.3. Lygtis $\cos x = a$

Raskime tas x reikšmes, su kuriomis būtų teisinga lygybė

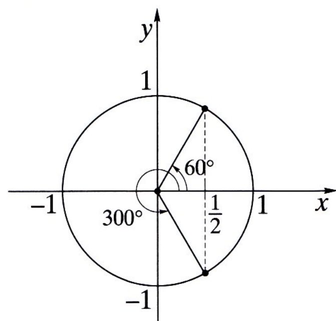
$$\cos x = \frac{1}{2}.$$

Pirmiausia raskime x reikšmes, tenkinančias šią lygybę ir priklausančias intervalui $[0°; 360°]$.



Reikia rasti dydžius tų kampų x, kurių kosinusai lygūs $\frac{1}{2}$.

Iš brėžinio matome, kad intervale $[0°; 360°]$ yra du kampai, kurių kosinusai lygūs $\frac{1}{2}$: $x_1 = 60°$, $x_2 = 300°$.



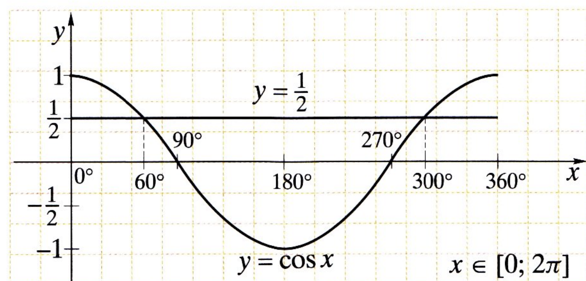
Iš tikrųjų:

$$\cos 60° = \frac{1}{2}, \quad \cos 300° = \frac{1}{2}.$$

Lygties

$$\cos x = \frac{1}{2}, \quad x \in [0°; 360°],$$

sprendinius galima pavaizduoti geometriškai — nubraižius funkcijų $f(x) = \cos x$ ir $g(x) = \frac{1}{2}$ grafikus: kosinusoidės ir tiesės bendrų taškų x koordinatės (abscisės) yra lygties $\cos x = \frac{1}{2}$ sprendiniai.



$\cos x = \frac{1}{2}$, $x \in [0°; 360°]$;

$x_1 = 60°$, $x_2 = 300°$.

Kadangi kosinusas yra periodinė funkcija su mažiausiu teigiamu periodu $360°$, t. y.

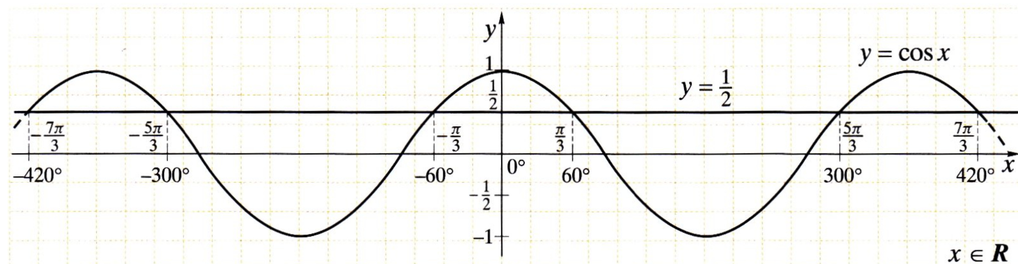
$$\cos x = \cos(x + 360°),$$

tai lygties

$$\cos x = \frac{1}{2}, \quad x \in \boldsymbol{R},$$

sprendinius galima užrašyti taip:

$$x_1 = 60° + 360° \cdot k, \quad k \in \boldsymbol{Z}; \qquad x_2 = 300° + 360° \cdot m, \quad m \in \boldsymbol{Z}.$$



Lygties sprendinius užrašykime ne laipsniais, o radianais. Kadangi $60°$ lygu $\frac{\pi}{3}$ radianų, $300°$ lygu $\frac{5\pi}{3}$, $360°$ lygu 2π, tai

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}; \qquad x_2 = \frac{5\pi}{3} + 2\pi m, \quad m \in \boldsymbol{Z}.$$

 Raskite lygties $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$:
a) sprendinius, priklausančius intervalui $x \in [0°; 360°]$;
b) visus sprendinius.
Punkto b) atsakymą parašykite ir laipsniais, ir radianais.

Pratimai ir uždaviniai

114. Raskite lygties:

1) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\cos x = -\frac{1}{2}$

sprendinius intervale:

a) $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; b) $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$; c) $x \in [0; \pi]$;
d) $x \in [2\pi; 4\pi]$; e) $x \in (-\infty; +\infty)$.

Lygties sprendinius užrašykite ir laipsniais, ir radianais.

115. Išspręskite lygtį.

a) $\cos x = 0$; b) $\cos x = 1$; c) $\cos x = -1$.

116. Ar su visomis a reikšmėmis lygtis $\cos x = a$ turi sprendinių? Paaiškinkite remdamiesi funkcijų $f(x) = \cos x$ ir $g(x) = a$ grafikais.

117. Lygties

$\cos x = a \quad (-1 \leqslant a \leqslant 1)$

sprendinį, *priklausantį intervalui*

$[0; \pi]$,

vadinsime skaičiaus a *arkkosinusu* ir žymėsime $\arccos a$. Pavyzdžiui,
$\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, nes $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ ir $\frac{\pi}{3} \in [0; \pi]$.

1) Raskite $\arccos a$, kai a lygu: $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 1, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, -1, -2, 0.

2) Ar teisinga lygybė: $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$? $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{3\pi}{4}$?

118. Naudojantis arkkosinuso žymeniu, lygties $\cos x = a$ $(-1 \leqslant a \leqslant 1)$ sprendinius galima užrašyti taip:

$$x = \pm \arccos a + 2k\pi, \quad k \in \boldsymbol{Z}$$

Pavyzdžiui, lygties

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

sprendiniai yra

$$x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2k\pi = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \boldsymbol{Z}.$$

Iš tikrųjų:

- kai $k = 0$, tai
  $x = \pm\frac{\pi}{3}$ — taip užrašyti du sprendiniai: $\frac{\pi}{3}$ ir $-\frac{\pi}{3}$;
- kai $k = 1$, tai
  $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi$ — du sprendiniai: $\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7\pi}{3}$ ir $-\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$;
- kai $k = -1$, tai
  $x = \pm\frac{\pi}{3} - 2\pi$ — du sprendiniai: $\frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{5\pi}{3}$ ir $-\frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{7\pi}{3}$;

ir t. t.

Naudodamiesi lygties $\cos x = a$ sprendinių formule $x = \pm \arccos a + 2k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$, užrašykite sprendinius lygties:

a) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $\cos x = 1$; d) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;
e) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; f) $\cos x = -1$; g) $\cos x = 0$.

119. Išspręskite lygtį:

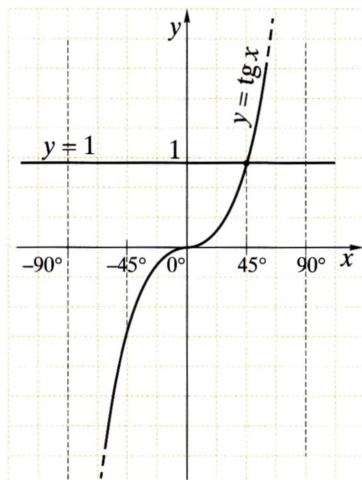
a) $2\cos x = 0$; b) $2\cos x = 1$; c) $2\cos x = 3$;
d) $\sin x \cdot \cos x = 0$; e) $\sin x \cdot \cos x - \sin x = 0$; f) $\cos x + \sin x \cdot \cos x = 0$.

10.4. Lygtis $\operatorname{tg} x = a$

Išspręskime lygtį

$$\operatorname{tg} x = 1.$$

Pirmiausia raskime lygties $\operatorname{tg} x = 1$ sprendinius intervale $(-90°; 90°)$.
Nubraižykime tangento grafiką $y = \operatorname{tg} x$ intervale $x \in (-90°; 90°)$ ir tiesę $y = 1$.

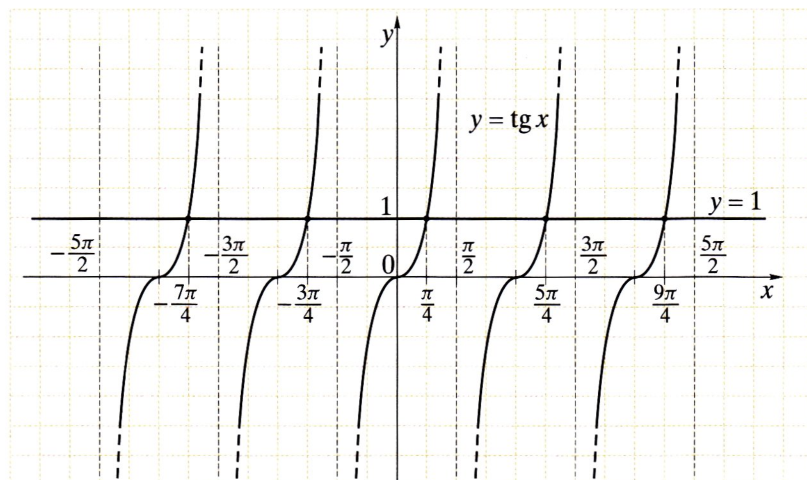


Tangentoidė $y = \operatorname{tg} x$ ir tiesė $y = 1$ intervale $(-90°; 90°)$ turi vieną bendrą tašką, kurio abscisė $x = 45°$. Vadinasi, lygties $\operatorname{tg} x = 1$, $x \in (-90°; 90°)$, sprendinys yra $x = 45°$. Iš tikrųjų, $\operatorname{tg} 45° = 1$.
Tangentas yra periodinė funkcija su mažiausiu teigiamu periodu $180°$, t. y. $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + 180°)$. Vadinasi, lygties

$$\operatorname{tg} x = 1, \quad x \in \boldsymbol{R},$$

sprendiniai yra:

laipsniais $x = 45° + 180° \cdot k, \quad k \in \boldsymbol{Z}$; radianais $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}$.



Pratimai ir uždaviniai

120. Raskite lygties:

1) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; 2) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$; 3) $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

sprendinius intervale:

a) $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$; b) $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$; c) $x \in \left(-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right)$;

d) $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Lygties sprendinius užrašykite ir laipsniais, ir radianais.

121. Kiek sprendinių intervale $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ turi lygtis: a) $\operatorname{tg} x = 100$? b) $\operatorname{tg} x = -351$?

122. Išspręskite lygtį. a) $\operatorname{tg} x = 0$; b) $\operatorname{tg} x = -1$.

123. Ar su visomis a reikšmėmis lygtis $\operatorname{tg} x = a$ turi sprendinių?

124. Lygties $\operatorname{tg} x = a$ $(-\infty < a < \infty)$ sprendinį, *priklausantį intervalui* $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, vadinsime skaičiaus a *arktangentu* ir žymėsime $\operatorname{arctg} a$.

Pavyzdžiui, $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, nes $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$ ir $\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

1) Raskite $\operatorname{arctg} a$, kai a lygu:

$\sqrt{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{3}$, -1, $-\sqrt{3}$, $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2) Ar teisinga lygybė:

$\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$? $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{4\pi}{3}$? $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{5}$?

125. Naudojantis arktangento žymeniu, lygties $\operatorname{tg} x = a$ $(-\infty < a < \infty)$ sprendinius galima užrašyti taip:

$$x = \operatorname{arctg} a + k\pi, \quad k \in \boldsymbol{Z}$$

Pavyzdžiui, lygties $\operatorname{tg} x = 1$ sprendiniai yra $x = \operatorname{arctg} 1 + k\pi = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$.
Iš tikrųjų:

- kai $k = 0$, tai $x = \frac{\pi}{4}$;
- kai $k = 1$, tai $x = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$;
- kai $k = -1$, tai $x = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}$;

ir t. t.

Naudodamiesi lygties $\operatorname{tg} x = a$ sprendinių formule $x = \operatorname{arctg} a + k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$, užrašykite sprendinius lygties:

a) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$; b) $\operatorname{tg} x = 1$; c) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; d) $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;
e) $\operatorname{tg} x = -1$; f) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$; g) $\operatorname{tg} x = 0$.

126. Išspręskite lygtį.
a) $3 \operatorname{tg} x = 0$; b) $3 \operatorname{tg} x = 3$; c) $\operatorname{tg} x \cdot \sin x = 0$.

10.5. Trigonometrija geometrijoje

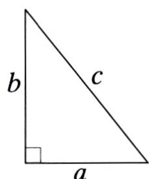
Žodis „trigonometrija“ sudarytas suliejus du graikų kalbos žodžius: trikampis ir matavimas.
Taigi trigonometrija atsirado iš žinių apie trikampių matavimą. Pirmiausia trigonometrijos prisireikė ne matematikams, bet astronomams, kuriems rūpėjo ne patys trikampiai, bet atstumai tarp dangaus kūnų ir jų tarpusavio padėtys.
Prisiminkime, kaip sinusai, kosinusai ir tangentai padeda ieškant trikampio nežinomų elementų (kraštinių ilgių, kampų dydžių).

Statusis trikampis

Trikampis, kurio vienas kampas yra status (= 90°), vadinamas stačiuoju.

Žinodami stačiojo trikampio dviejų kraštinių ilgius, galime apskaičiuoti trečiosios ilgį.

Skaičiuodami remiamės Pitagoro teorema:



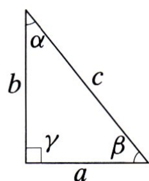
$c^2 = a^2 + b^2$ — stačiojo trikampio įžambinės ilgio kvadratas lygus statinių ilgių kvadratų sumai.

$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad a = \sqrt{c^2 - b^2}, \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}.$


Apskaičiuokite stačiojo trikampio:
a) įžambinės ilgį c, jei statiniai yra $a = 3$ cm, $b = 4$ cm;
b) statinio ilgį b, jei įžambinė $c = 10$, o kitas statinis $a = 6$.

Žinodami stačiojo trikampio dviejų kraštinių ilgius, galime apskaičiuoti trikampio kampų dydžius.

Skaičiuodami remiamės trigonometrinėmis funkcijomis:



$\frac{a}{c} = \sin\alpha,\ \alpha = \arcsin\frac{a}{c}; \quad \frac{a}{c} = \cos\beta,\ \beta = \arccos\frac{a}{c};$

$\frac{b}{c} = \cos\alpha,\ \alpha = \arccos\frac{b}{c}; \quad \frac{b}{c} = \sin\beta,\ \beta = \arcsin\frac{b}{c};$

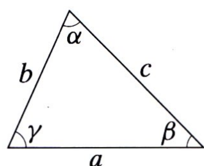
$\frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha,\ \alpha = \operatorname{arctg}\frac{a}{b}; \quad \frac{b}{a} = \operatorname{tg}\beta,\ \beta = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}.$

Pavyzdžiui, jei $a = 1$, $c = 2$, tai $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = \arcsin\frac{1}{2} = 30°$; $\beta = 90° - 30° = 60°$.


Apskaičiuokite stačiojo trikampio smailiųjų kampų α ir β dydžius, jei:
a) statinis $b = 2$ cm, įžambinė $c = 6$ cm; b) statiniai $a = 3$, $b = 5$.

Bet koks trikampis

Žinodami trikampio dviejų kraštinių ilgius ir kampo tarp jų dydį arba vienos kraštinės ilgį ir dviejų kampų dydžius, galime apskaičiuoti nežinomų kraštinių ilgius ir kampų dydžius.



Skaičiuodami remiamės kosinusų ir sinusų teoremomis:

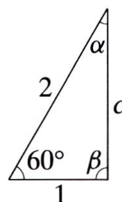
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma,$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta.$$

Kraštinės ilgio kvadratas lygus kitų dviejų kraštinių ilgių kvadratų sumai minus tų kraštinių ir kampo tarp jų kosinuso dviguba sandauga.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta},$$
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma},$$
$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Trikampio kraštinių ilgiai yra proporcingi prieš jas esančių kampų dydžių sinusams.

UŽDAVINYS. Apskaičiuokime trikampio kraštinės c ilgį ir kampų α ir β dydžius, jei kitų dviejų kraštinių ilgiai yra $a = 1$, $b = 2$, o kampas tarp tų kraštinių $\gamma = 60^\circ$.



1) Apskaičiuojame kraštinės c ilgį:

$$c^2 = 1^2 + 2^2 - 2\cdot 1\cdot 2\cdot\cos 60^\circ,$$
$$c^2 = 1 + 4 - 4\cdot\frac{1}{2},$$
$$c^2 = 5 - 2, \quad c^2 = 3,$$
$$c = \sqrt{3}.$$

2) Randame kampo α dydį:

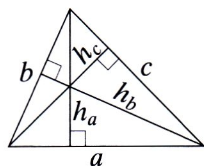
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}, \quad \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}, \quad \sin\alpha = \frac{\sin 60^\circ}{\sqrt{3}},$$
$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{3}}, \quad \sin\alpha = \frac{1}{2}, \quad \alpha = \arcsin\frac{1}{2}, \quad \alpha = 30^\circ.$$

3) Apskaičiuojame β: $180^\circ - 30^\circ - 60^\circ = 90^\circ$.


Apskaičiuokite trikampio nežinomų kraštinių ilgius ir kampų dydžius, jei:
a) $a = 5$, $c = 8$, $\alpha = 30^\circ$; b) $b = 10$, $\alpha = 30^\circ$, $\gamma = 40^\circ$.

Trikampio plotas

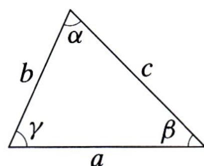
Trikampio plotą galime apskaičiuoti žinodami kraštinės ir į ją nubrėžtos aukštinės ilgius:



$$S = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot h_a,$$
$$S = \tfrac{1}{2} \cdot b \cdot h_b,$$
$$S = \tfrac{1}{2} \cdot c \cdot h_c.$$

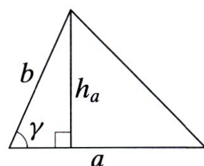
Trikampio plotas lygus kraštinės ir į ją nubrėžtos aukštinės ilgių sandaugos pusei.

Žinodami trikampio dviejų kraštinių ilgius ir kampo tarp tų kraštinių dydį, galime plotą skaičiuoti taip:



$$S = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma,$$
$$S = \tfrac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha,$$
$$S = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin\beta.$$

Įsitikinkime, pavyzdžiui, kad $S = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma$. Nubrėžkime aukštinę h_a.



$h_a = b \cdot \sin\gamma$ — statinis lygus įžambinei, padaugintai iš sinuso kampo prieš tą statinį.

$$S = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma.$$

? Įsitikinkite, kad $S = \tfrac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha$; $S = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin\beta$.

Trikampio plotas lygus dviejų kraštinių ilgių ir kampo tarp jų sinuso sandaugos pusei.

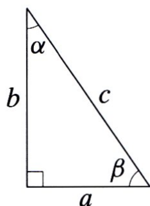
Pavyzdžiui, jei $a = 3\,\text{cm}$, $b = 4\,\text{cm}$, $\gamma = 45^\circ$, tai

$$S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \sin 45^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}\,(\text{cm}^2).$$

? Apskaičiuokite trikampio plotą, jei $a = 1\,\text{m}$, $b = 1\,\text{m}$, o kampas tarp tų kraštinių lygus 30°.

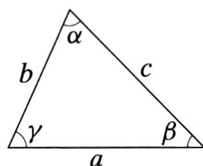
Pratimai ir uždaviniai

127. Apskaičiuokite stačiojo trikampio nežinomų kraštinių ilgius ir kampų dydžius.



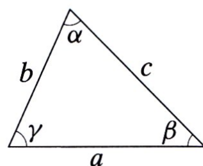
a) $a = 2$, $b = 3$;
b) $a = 3$, $c = 4$;
c) $b = 4$, $c = 5$;
d) $a = 5$, $\alpha = 30^\circ$;
e) $b = 3$, $\alpha = 20^\circ$;
f) $c = 1$, $\alpha = 40^\circ$;
g) $c = 2$, $\beta = 25^\circ$.

128. Apskaičiuokite trikampio nežinomų kraštinių ilgius ir kampų dydžius, jei:



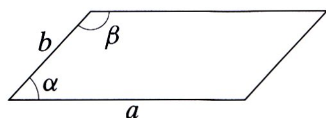
a) $a = 1$, $b = 2$, $\gamma = 30^\circ$;
b) $a = 3$, $c = 3$, $\beta = 80^\circ$;
c) $b = 4$, $c = 6$, $\alpha = 35^\circ$.

129. Apskaičiuokite trikampio plotą.



a) $a = 5$, $b = 3$, $\gamma = 30^\circ$;
b) $a = 2\,\text{cm}$, $c = 1\,\text{cm}$, $\beta = 60^\circ$;
c) $b = 1$, $c = 2$, $\alpha = 45^\circ$.

130. Apskaičiuokite lygiagretainio plotą.



a) $a = 2$, $b = 6$, $\alpha = 35^\circ$;
b) $a = 5\,\text{cm}$, $b = 1\,\text{cm}$, $\beta = 100^\circ$;
c) $a = b = 32\,\text{mm}$, $\alpha = 45^\circ$.

Plotą skaičiuokite trejaip:

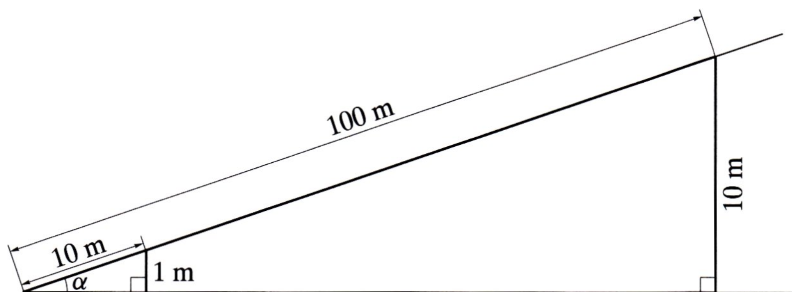
1) Apskaičiuokite aukštinės, nubrėžtos į kraštinę a, ilgį h_a ir remkitės formule
$S = a \cdot h_a$.
2) Apskaičiuokite aukštinės, nubrėžtos į kraštinę b, ilgį h_b ir remkitės formule
$S = b \cdot h_b$.
3) Remkitės tuo, kad lygiagretainio įstrižainė dalija jį į du lygius trikampius. Remdamiesi formule
$$S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha,$$
apskaičiuokite vieno tokio trikampio plotą ir raskite lygiagretainio plotą.
Paaiškinkite, kodėl lygiagretainio plotą galima apskaičiuoti remiantis formule
$$S = ab\sin\alpha.$$
Ar lygiagretainio plotą galima skaičiuoti remiantis formule
$$S = ab\sin\beta?$$

131. Kelyje galima išvysti tokį ženklą:



Šis ženklas rodo, kad kelio kilimas 10%.

Tai reiškia, kad, tokiu keliu nuvažiavę, pavyzdžiui, 10 metrų, pakilsime 1 metrą, nuvažiavę 100 metrų, pakilsime 10 metrų.



1) Apskaičiuokite tokios įkalnės su horizontu sudaromo kampo α sinuso reikšmę ir jo dydį laipsniais.
2) Apskaičiuokite kelio nuokalnės su horizontu sudaromo kampo sinusą ir to kampo dydį laipsniais, jei šalia kelio stovi žemiau pavaizduotas ženklas:

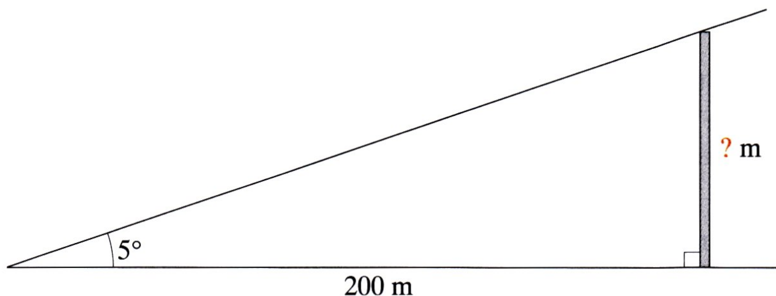


3) Automobilis važiavo į 600 metrų kalną. Kokį atstumą jis nuvažiavo, jei kelias su horizontu sudaro 8° kampą?

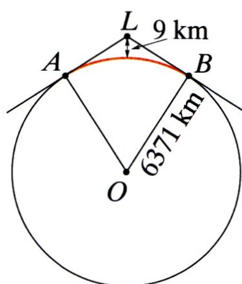
132. 200 metrų ilgio kelio atkarpa eina 6% statumo įkalne.

a) Kokį kampą sudaro kelias su horizontu?
b) Kas būtų parašyta ant ženklo, jei kampas su horizontu sudarytų 10° kampą?

133. Žiūrint iš 200 metrų atstumo, bokštas matomas 5° kampu. Koks bokšto aukštis?



134. Lėktuvas virš Žemės pakilo į 9 km aukštį (brėžinyje jis pažymėtas tašku L). Žemės spindulys $OB = 6371$ km.



a) Raskite atkarpų LO, LA ir LB ilgius.

b) Raskite kampų $\angle LOA$, $\angle LOB$ ir $\angle AOB$ dydžius.

c) Raskite lanko $\smile AB$ ilgį.

d) Apskaičiuokite plotą Žemės paviršiaus, kurį galima matyti iš lėktuvo.

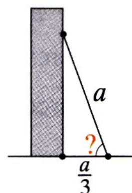


Apskritimo liestinė yra statmena spinduliui, nubrėžtam į lietimosi tašką.

135. Kad kopėčios stovėtų stabiliai, rekomenduojama jas į sieną atremti taip, kad atstumas nuo kopėčių atsparos taško iki sienos sudarytų maždaug trečdalį kopėčių ilgio.

a) Kokiu kampu į grindis rekomenduojama atremti kopėčias?

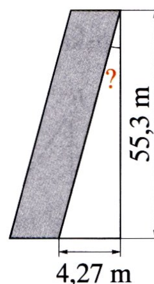
b) Kopėčios yra 5 m ilgio. Kokiame aukštyje virš grindų bus kopėčių viršus, jei kopėčios atremtos, kaip aprašyta aukščiau?



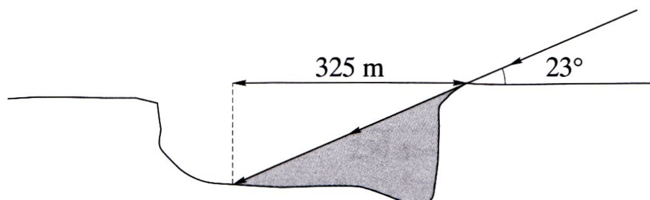
136. Pizos bokštas yra 55,3 metrų aukščio. Jis nuo vertikalės yra nukrypęs 4,27 metro.

a) Kokį kampą bokštas sudaro su vertikale?

b) Kiek metrų buvo bokštas nukrypęs nuo pagrindo, kai jo posvyrio su vertikale kampas buvo: 1°? 2°?



137. Mokslininkai Mėnulio kraterių gylius apskaičiuoja naudodamiesi nuotraukomis. Jie remiasi kraterio dugne matomu šešėlio ilgiu ir Saulės spindulių kritimo kampo dydžiu. Apskaičiuokite kraterio gylį, jei šešėlio ilgis 325 m, o Saulės spindulių kritimo kampas, fotografuojant kraterį, buvo 23°.



10.6. Pasitikrinkime

138. Apskaičiuokite.

a) $\sin\alpha$, kai $\cos\alpha = 0{,}974$;
b) $\cos\alpha$, kai $\sin\alpha = 0{,}375$;
c) $\cos\alpha$, kai $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}176$;
d) $\operatorname{tg}\alpha$, kai $\sin\alpha = 0{,}643$, $\cos\alpha = 0{,}766$.

Kuriame ketvirtyje yra kampas α?

139. Suprastinkite reiškinį.
a) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha$; b) $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 - 1$.

140. Išspręskite lygtį.
a) $\sin x = 0$, $x \in [2\pi; 4\pi]$; b) $\cos x = \frac{1}{2}$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;
c) $\operatorname{tg} x = 1$, $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

141. Išspręskite lygtį.
a) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x \in \boldsymbol{R}$; b) $\cos x = 0$, $x \in \boldsymbol{R}$; c) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$, $x \in \boldsymbol{R}$.

142. Apskaičiuokite.

a) $\arcsin 0$;
b) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$;
c) $\arccos 1$;
d) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;
e) $\operatorname{arctg} 0$;
f) $\operatorname{arctg}(-1)$.

143. Su kuriomis a reikšmėmis neturi sprendinių lygtis:
a) $\sin x = a$? b) $\cos x = a$? c) $2\sin x = a$? d) $-3\cos x = a$?

144. Apskaičiuokite stačiojo trikampio nežinomų kraštinių ilgius ir kampų dydžius.

a) $AB = 3$ cm, $AC = 2$ cm, $\angle A = 90^\circ$
$BC = ?$
$\angle B = ?$
$\angle C = ?$

b) $BC = 5$, $AC = 3$, $\angle A = 90^\circ$
$AB = ?$
$\angle B = ?$
$\angle C = ?$

c) $\angle B = 30^\circ$, $BC = 6$, $\angle A = 90^\circ$
$AC = ?$
$AB = ?$
$\angle C = ?$

d) $AB = 1$, $\angle B = 60^\circ$, $\angle A = 90^\circ$
$BC = ?$
$AC = ?$
$\angle C = ?$

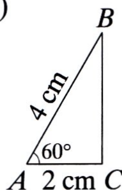
e) $\angle A = 40^\circ$, $AC = 5$ cm, $\angle B = 90^\circ$
$AB = ?$
$BC = ?$
$\angle C = ?$

f) $AB = 2$, $\angle A = 50^\circ$, $\angle B = 90^\circ$
$AC = ?$
$BC = ?$
$\angle C = ?$

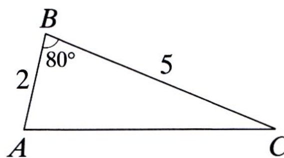
g) $AC = 4$, $\angle B = 90^\circ$
$\angle A = \angle C = ?$
$AB = ?$
$BC = ?$

145. Apskaičiuokite trikampio nežinomų kraštinių ilgius ir kampų dydžius.

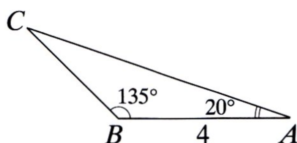
a)



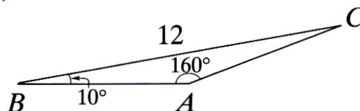
b)



c)

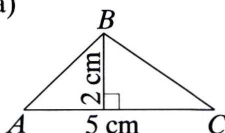


d)

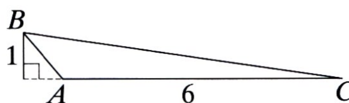


146. Apskaičiuokite plotą.

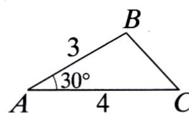
a)



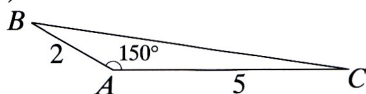
b)



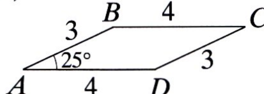
c)



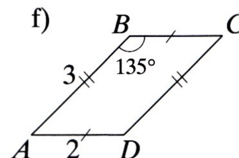
d)



e)



f)



147. Ką reiškia toks kelio ženklas?

a)

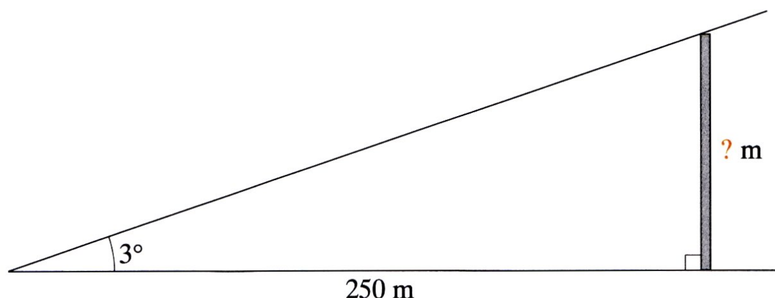


b)



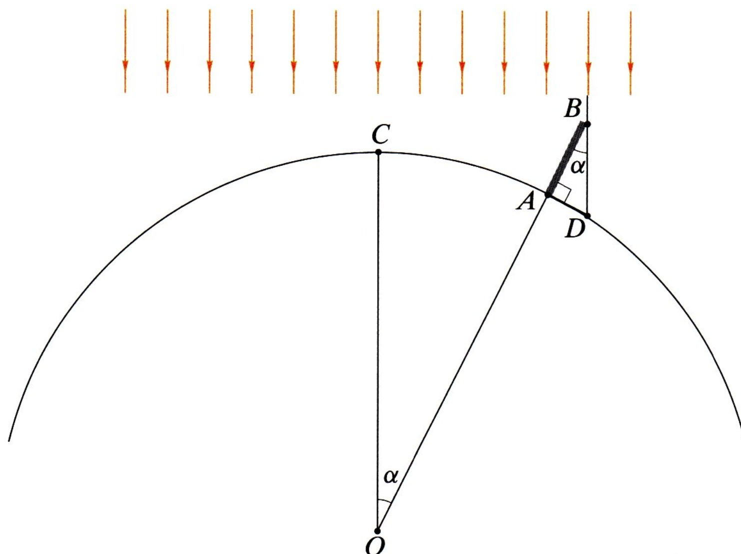
Apskaičiuokite įkalnės (nuokalnės) su horizontu sudaromo kampo sinusą bei kampo dydį laipsniais.

148. Koks stulpo aukštis?



Kaip apskaičiuoti Žemės spindulio ilgį?

Naudodamasis šešėliais, Talis apskaičiavo Egipto piramidės aukštį, o Eratostenas apskaičiavo Žemės rutulio spindulio ilgį.



Eratostenas žinojo, kad vasaros lygiadienio metu Asuanoje (brėžinyje pažymėta tašku C) Saulė vidudienį yra virš galvos. Jis taip pat žinojo atstumą tarp Aleksandrijos (brėžinyje pažymėta tašku A), kur jis gyveno, ir Asuanos: $AC = 800\,\text{km}$.
Aleksandrijoje tuo momentu, kai Asuanoje Saulė buvo virš galvos, jis išmatavo obelisko AB metamo šešėlio AD ilgį ir, remdamasis lygybe

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{AD}{AB},$$

apskaičiavo kampo α dydį:

$$\alpha = 7{,}2^\circ.$$

Remdamasis tuo, jog

$$\smile AC = 800\,\text{km}, \quad \angle ABD = \angle COA = \alpha = 7{,}2^\circ,$$

jis apskaičiavo Žemės apimtį:

$7{,}2^\circ$ atitinka $800\,\text{km}$,
360° atitinka $800 \cdot 50 = 40\,000\,\text{km}$.

O remdamasis formule $C = 2\pi r$, gavo Žemės spindulio ilgį OA:

$$2\pi \cdot OA = 40\,000,$$
$$OA \approx \frac{20\,000}{3{,}14},$$
$$OA \approx 6400\,(\text{km}).$$

11 FUNKCIJOS IŠVESTINĖ

11.1. Kelio ir greičio ryšys

Judėjimas pastoviu greičiu

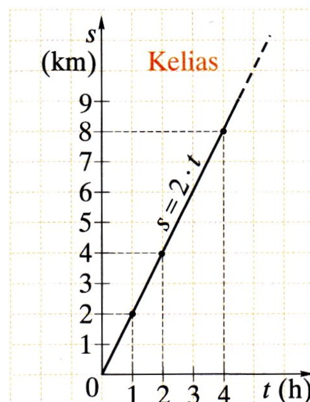
Kūno, judančio *pastoviu* greičiu v, per laiką t nueitas kelias s apskaičiuojamas pagal formulę:

$$s(t) = v \cdot t$$

Sakykime, kūno nueito kelio s (kilometrais) per laiką t (valandomis) formulė yra

$$s(t) = 2 \cdot t.$$

Remdamiesi šia formule, galime apskaičiuoti kiekvienu laiko momentu nueitą kelią, pavyzdžiui:

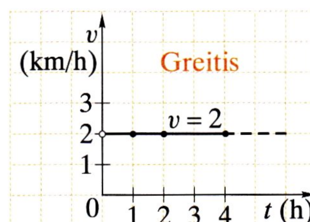


kai $t = 1\,\text{h}$, tai $s(1) = 2 \cdot 1 = 2\,\text{km}$,
kai $t = 2\,\text{h}$, tai $s(2) = 2 \cdot 2 = 4\,\text{km}$,
kai $t = 4\,\text{h}$, tai $s(4) = 2 \cdot 4 = 8\,\text{km}$.

Taip pat iš formulės galime pasakyti kūno judėjimo greitį, — jis kiekvienu laiko momentu yra *vienodas*:

$$v(t) = 2\,\text{km/h}.$$

Pavyzdžiui:



kai $t = 1\,\text{h}$, tai $v(1) = 2\,\text{km/h}$,
kai $t = 2\,\text{h}$, tai $v(2) = 2\,\text{km/h}$,
kai $t = 4\,\text{h}$, tai $v(4) = 2\,\text{km/h}$.

Judėjimas su pagreičiu

Kai kūnas juda *tolygiai greitėdamas*, t. y. su pastoviu *pagreičiu* a, tai per laiką t jo nueitas kelias s apskaičiuojamas pagal formulę:

$$s(t) = \frac{a}{2} \cdot t^2$$

To kūno greitis laiko momentu t (momentinis greitis) apskaičiuojamas pagal formulę:

$$v(t) = a \cdot t$$

Sakykime, kūno nueito kelio s (kilometrais) per laiką t (valandomis) formulė yra

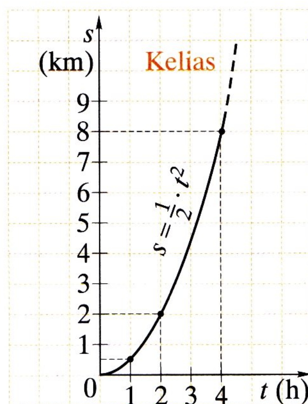
$$s = \frac{1}{2} \cdot t^2.$$

Remdamiesi šia formule, galime apskaičiuoti kiekvienu laiko momentu jau nueitą kelią, pavyzdžiui:

kai $t = 1$ h, tai $s(1) = \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2}$ km,

kai $t = 2$ h, tai $s(2) = \frac{1}{2} \cdot 2^2 = 2$ km,

kai $t = 4$ h, tai $s(4) = \frac{1}{2} \cdot 4^2 = 8$ km.



Iš formulės $s = \frac{1}{2} \cdot t^2$ nesunku nustatyti kūno judėjimo pagreitį:

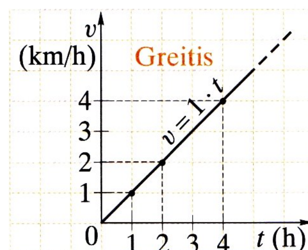
$$\frac{a}{2} = \frac{1}{2}, \quad a = 1\,\text{km/h}^2,$$

ir greičio priklausomybę nuo laiko:

$$v(t) = a \cdot t = 1 \cdot t = t.$$

Kiekvienu laiko momentu kūno greitis (momentinis greitis) yra *nevienodas*, pavyzdžiui:

kai $t = 1$ h, tai $v(1) = 1$ km/h,
kai $t = 2$ h, tai $v(2) = 2$ km/h,
kai $t = 4$ h, tai $v(4) = 4$ km/h.



Pratimai ir uždaviniai

Judėjimas pastoviu greičiu

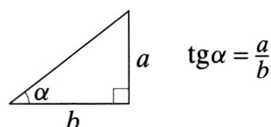
149. Automobilio nuvažiuotą kelią s (kilometrais) per laiką t (valandomis) galima apskaičiuoti pagal formulę:

a) $s(t) = 60 \cdot t$; b) $s(t) = 90 \cdot t$; c) $s(t) = 100 \cdot t$.

1) Koks automobilio greitis kilometrais per valandą? kilometrais per minutę? metrais per sekundę?
2) Nubraižykite kelio $s(t)$ ir greičio $v(t)$ grafikus.
3) Raskite tiesės $s(t)$ su t ašimi sudaromo kampo tangentą ir to kampo didumą laipsniais. Palyginkite to kampo tangentą su greičio reikšme.

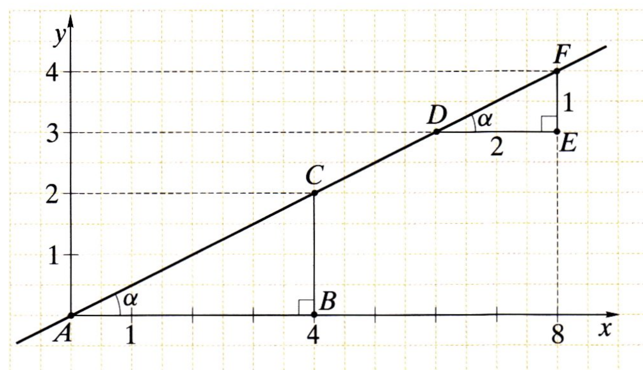


Stačiojo trikampio smailiojo kampo tangentas:



$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$

Raskime tiesės $y = \frac{1}{2}x$ ir Ox ašies sudaromo kampo tangentą:



$\mathrm{tg}\,\alpha$ galime apskaičiuoti, pavyzdžiui, iš $\triangle ABC$ ($\angle B = 90°$):

$AB = 4$,

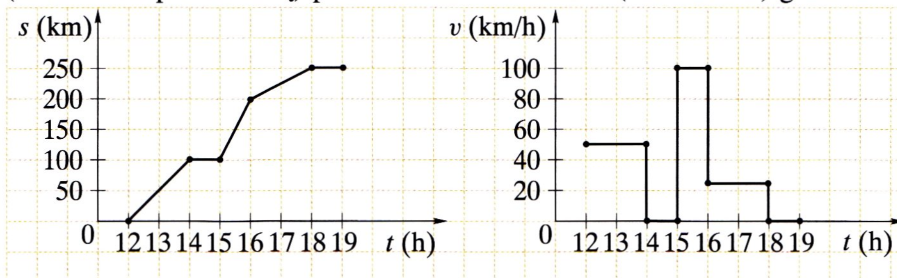
$BC = 2$, nes taško C koordinatės $(4; 2)$,

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2};$$

arba iš bet kurio kito analogiškai sukonstruoto stačiojo trikampio, pvz., iš $\triangle DEF$ ($\angle E = 90°$):

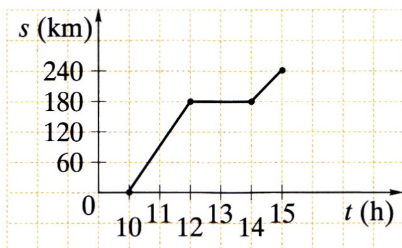
$$DE = 2, \quad FE = 1, \quad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{FE}{DE} = \frac{1}{2}.$$

150. Nubraižyti automobilio nuvažiuoto kelio s (kilometrais) ir važiavimo greičio v (kilometrais per valandą) priklausomai nuo laiko t (valandomis) grafikai:



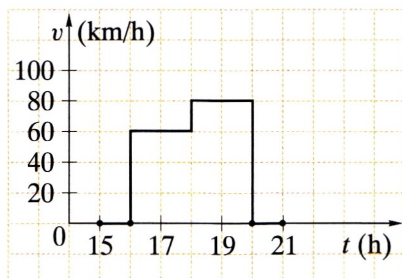
1) Kiek kilometrų nuvažiavo automobilis nuo 12 iki 19 valandos?
2) Kiek laiko automobilis važiavo? kuriomis valandomis važiavo?
3) Kuriomis valandomis tarp 12 ir 19 valandos automobilis stovėjo?
4) Koks buvo automobilio vidutinis greitis tarp:
   a) 12 ir 14 valandos? b) 15 ir 16 valandos? c) 16 ir 18 valandos?
   d) 15 ir 18 valandos? e) 12 ir 19 valandos?
5) Koks buvo automobilio greitis:
   a) 13^{00}? b) 14^{30}? c) 15^{45}? d) 17^{00}? e) 19^{00}?
6) Užrašykite formules, kuriomis remiantis būtų galima apskaičiuoti automobilio nuvažiuotą kelią s per laiką t, kai t yra:
   a) tarp 12^{00} ir 14^{00}; tarp 15^{00} ir 16^{00}; tarp 16^{00} ir 18^{00};
   b) tarp 14^{00} ir 15^{00}; tarp 18^{00} ir 19^{00}.

151. Pavaizduokite grafiku automobilio greičio priklausomybę nuo laiko, jei jo nuvažiuoto kelio priklausomybės nuo laiko grafikas yra:



a) Koks buvo vidutinis greitis:
   tarp 10^{00} ir 12^{00}? tarp 14^{00} ir 15^{00}?
b) Koks automobilio *važiavimo* vidutinis greitis?
c) Koks *kelionės* vidutinis greitis?
d) Koks buvo automobilio greitis:
   11^{00}? 12^{15}? 14^{10}?

152. Pavaizduokite grafiku automobilio nuvažiuoto kelio s priklausomybę nuo laiko t, jei jo važiavimo greičio priklausomybės nuo laiko grafikas yra:



Užrašykite kiekvienos važiavimo atkarpos:

$15^{00}-16^{00}$, $16^{00}-18^{00}$,

$18^{00}-20^{00}$, $20^{00}-21^{00}$,

kelio formules.

Judėjimas su pagreičiu

153. Iš baseino išleidžiamas vanduo. Baseine esančio vandens aukščio h (centimetrais) priklausomybė nuo vandens išleidimo laiko t (valandomis) yra apskaičiuojama pagal formulę:

$$h(t) = k \cdot t + b, \quad \text{čia} \quad k \text{ ir } b \text{ — skaičiai.}$$

Po 1 h nuo vandens išleidimo pradžios baseine vandens aukštis buvo 300 cm, po 4 h — 90 cm.

1) Apskaičiuokite, kiek vidutiniškai vandens aukštis (centimetrais) baseine sumažėja per valandą. Koks aukščio kitimo greitis cm/h? m/h? mm/min?
2) Apskaičiuokite koeficientų k ir b reikšmes.
3) Nubraižykite vandens aukščio h (cm) priklausomybės nuo laiko t (h) grafiką. Koks tos tiesės su teigiamąja t ašies kryptimi sudaromo kampo tangentas? Palyginkite jį su k reikšme.
4) Koks buvo vandens aukštis baseine iš pradžių? Palyginkite jį su b reikšme.
5) Per kiek laiko iš baseino ištekės visas vanduo?



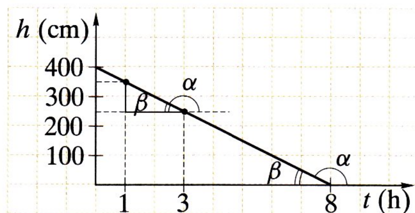
Tegul po 1 h nuo išleidimo pradžios baseine vandens aukštis buvo 350 cm, o po 3 h — 250 cm. Vidutiniškai per 1 valandą vandens aukštis sumažėja

$$\frac{350-250}{3-1} = \frac{100}{2} = 50\,\text{cm}.$$

Apskaičiuokime funkcijos $h(t) = k \cdot t + b$ koeficientus k ir b. Žinome:
kai $t = 1$, tai $h(t) = 350$, t. y. $350 = k \cdot 1 + b$,
kai $t = 3$, tai $h(t) = 250$, t. y. $250 = k \cdot 3 + b$.
Mums reikia rasti tas k ir b reikšmes, su kuriomis abi lygtys virstų teisingomis lygybėmis. Išspręskime šią lygčių sistemą:

$$\begin{cases} k + b = 350 \\ 3k + b = 250 \end{cases} \Rightarrow 2k = -100,\ k = -50;\ b = 350 + 50 = 400.$$

Vadinasi, $h(t) = -50t + 400$.



$\operatorname{tg}\beta = \frac{100}{2} = \frac{400}{8} = 50,$
$\alpha = 180° - \beta,$
$\operatorname{tg}(180° - \beta) = -\operatorname{tg}\beta,$
$\operatorname{tg}\alpha = -50.$

154. Iš indo išleidžiamo vandens aukščio h (milimetrais) priklausomybė nuo laiko t (sekundėmis) yra apskaičiuojama pagal formulę $h(t) = -20 \cdot t + 1000$. Ką galima sužinoti iš šios formulės?

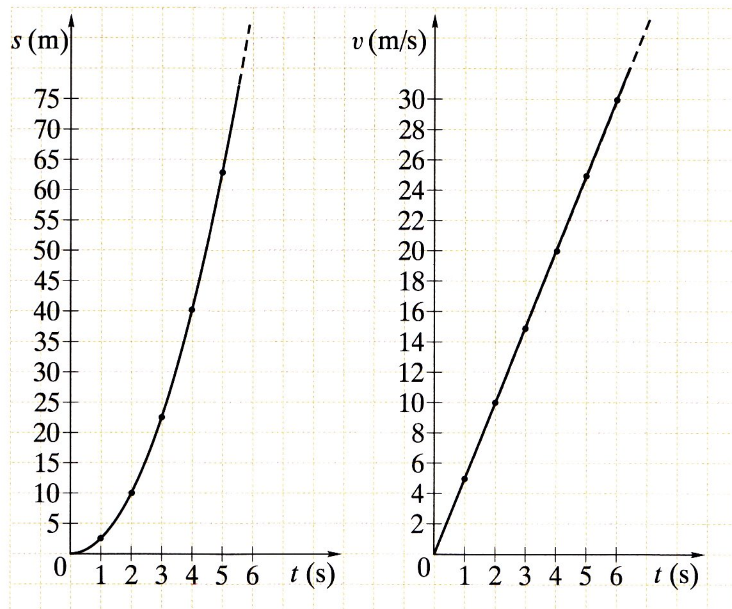


Remkitės 153 uždaviniu.

155. Automobilio nuvažiuotą kelią s (km) per laiką t (h) galima apskaičiuoti pagal formulę: a) $s(t) = t^2$; b) $s(t) = 2 \cdot t^2$; c) $s(t) = 5 \cdot t^2$.

1) Koks automobilio pagreitis?
2) Kam lygus automobilio greitis $v(t)$ kilometrais per valandą?
3) Apskaičiuokite automobilio greitį laiko momentais $t = 1$ h; 2 h; 10 h.
4) Nubraižykite kelio $s(t)$ ir greičio $v(t)$ grafikus.
5) Koks buvo automobilio *vidutinis* greitis laikotarpiu:
   $t \in [0; 1]$? $t \in [1; 2]$? $t \in [0; 2]$?

156. Buvo bandoma, per kiek laiko automobilis pasiekia 90 km/h greitį. Paveikslėlyje nubraižyti automobilio nuvažiuoto kelio s (metrais) ir važiavimo greičio v (metrais per sekundę) priklausomai nuo laiko t (sekundėmis) grafikai:



a) Po kiek laiko nuo starto pradžios automobilis pasiekė 90 km/h greitį?
b) Kokiu pagreičiu (m/s^2) važiavo automobilis?
c) Užrašykite automobilio kelio formulę $s(t) = \dots$.
d) Užrašykite automobilio greičio formulę $v(t) = \dots$.
e) Užpildykite lentelę:

Laikas (s)	0	1	2	3	4	5	6
Kelias (m)	0		10				
Momentinis greitis (m/s)	0		10				
Vidutinis greitis (m/s)	0		5				

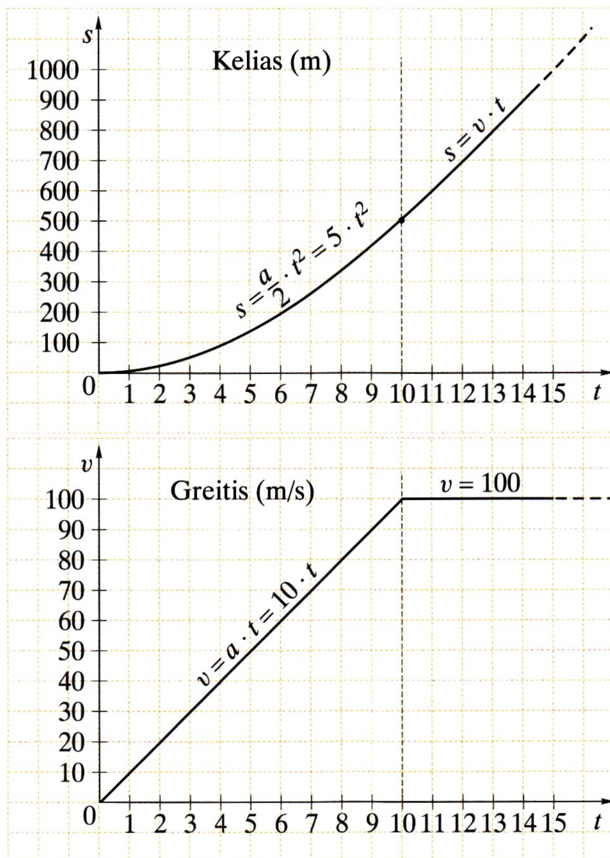


Vidutinę greičio reikšmę skaičiuokite nuo starto pradžios. Pavyzdžiui, lentelės langelyje ties 2 sekunde parašyta, kad vidutinis važiavimo greitis atkarpoje $t \in [0; 2]$ lygus 5 m/s.

157. Lenktynininkas bandė automobilį. Po starto, tolygiai greitėdamas, jis pasiekė maksimalų greitį ir toliau važiavo pastoviu greičiu.

Kompiuteris kiekvieną sekundę fiksavo nuvažiuotą kelią (metrais) ir momentinį greitį (metrais per sekundę). Buvo gauti tokie duomenys:

Laikas (s)	Kelias (m)	Momentinis greitis (m/s)
0	0	0
1	5	10
2	20	20
3	45	30
4	80	40
5	125	50
6	180	60
7	245	70
8	320	80
9	405	90
10	500	100
11	600	100
12	700	100
13	800	100
14	900	100
15	1000	100
⋮		



a) Kiek sekundžių automobilis važiavo greitėdamas? Koks buvo jo pagreitis (m/s^2)?

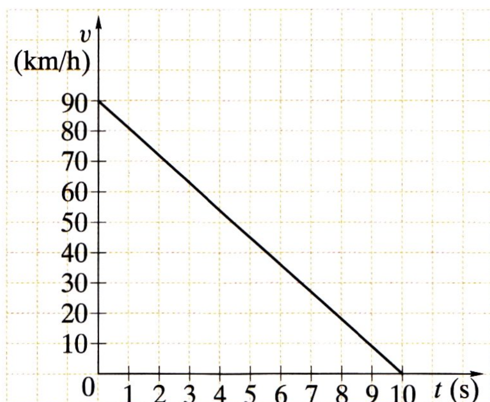
b) Koks buvo maksimalus automobilio greitis (km/h)?

c) Kam lygu $s(1)$? $s(2)$? $s(10)$? $s(13)$?

d) Kam lygu $v(1)$? $v(2)$? $v(10)$? $v(13)$?

e) Apskaičiuokite automobilio vidutinį greitį:
- laikotarpiu, kai jis važiavo greitėdamas;
- pirmųjų 15-os važiavimo sekundžių.

158. Automobilis pradėtas stabdyti, kai jo greitis buvo 90 km/h, ir, tolygiai mažėjant greičiui, jis sustojo po 10 sekundžių. Ši situacija pavaizduota grafiku:



a) Koks buvo automobilio greitis 1-ą, 2-ą, 5-ą stabdymo sekundę?

b) Kam lygus automobilio pagreitis?

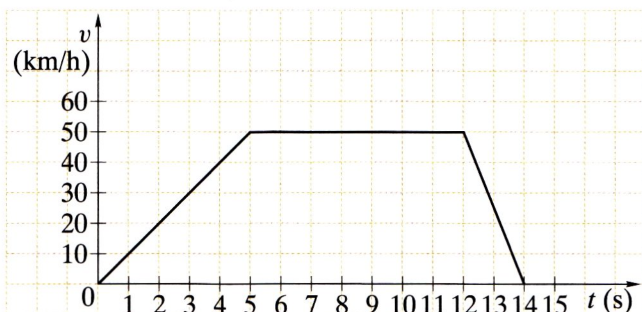
c) Kokį kelią nuvažiavo automobilis stabdydamas?



Kai kūnas juda tolygiai *greitėdamas*, tai per bet kuriuos lygius laiko tarpus greitis *padidėja* tuo pačiu dydžiu. Šiuo atveju pagreitis a yra didesnis už 0. Kai kūnas juda tolygiai *lėtėdamas*, tai per bet kuriuos lygius laiko tarpus greitis *sumažėja* tuo pačiu dydžiu. Šiuo atveju pagreitis a yra mažesnis už 0.

---

159. Apibūdinkite judėjimą automobilio, kurio greičio grafikas pavaizduotas brėžinyje:



a) Kiek laiko judėjo automobilis?

b) Kiek laiko automobilis važiavo greitėdamas? važiavo lėtėdamas?

c) Kokį atstumą automobilis nuvažiavo greitėdamas? važiuodamas pastoviu greičiu? lėtėdamas? iš viso?

d) Koks vidutinis važiavimo greitis?

e) Kokie buvo automobilio važiavimo pagreičiai?

160. a) Traukinys sustojo po 20 sekundžių nuo to momento, kai jį pradėjo stabdyti, ir per tą laiką nuvažiavo 120 m. Apskaičiuokite traukinio greitį stabdymo momentu ir traukinio pagreitį.

b) Traukinį, važiuojantį 18 m/s greičiu, pradėjo stabdyti. Traukinys, tolygiai lėtėdamas, sustojo po 15 sekundžių. Apskaičiuokite kelią, kurį traukinys nuvažiavo per tas 15 sekundžių.

161. Įsivaizduokime metalinį rutuliuką, paleistą laisvai kristi iš tam tikro aukščio. Laisvas kūnų kritimas yra *tolygiai greitėjantis* judėjimas.

Laisvojo kritimo ypatybė yra ta, kad visi kūnai toje pačioje vietoje krinta *vienodu pagreičiu.* Šis pagreitis vadinamas laisvojo kritimo pagreičiu.

Laisvojo kritimo pagreitis žymimas raide g.

Laisvai krintančio kūno kelias ir greitis apskaičiuojami pagal tolygiai greitėjančio judėjimo formules: $s = \frac{a}{2} \cdot t^2$ ir $v = a \cdot t$, pakeičiant a į g, t. y. laisvojo kūnų kritimo kelią s skaičiuosime pagal formulę

$$s(t) = \frac{g}{2} \cdot t^2, \quad v(t) = g \cdot t, \quad \text{čia } g \text{ — laisvojo kritimo pagreitis.}$$

Skaitinė g reikšmė įvairiose Žemės rutulio platumose yra skirtinga ir svyruoja tarp $983{,}24\,\mathrm{cm/s^2}$ ašigaliuose ir $978{,}05\,\mathrm{cm/s^2}$ pusiaujyje. Jei nereikia ypatingo tikslumo, tai dažniausiai g reikšmė imama lygi $980\,\mathrm{cm/s^2}$ arba net $1000\,\mathrm{cm/s^2}$. Paėmę g reikšmę lygią $1000\,\mathrm{cm/s^2}$, turėsime $s(t) = 500 \cdot t^2$.

1) Kokiu laiko vienetu turi būti matuojamas kūno laisvojo kritimo laikas t, kad galėtume remtis formule $s(t) = 500 \cdot t^2$. Koks šiuo atveju kritimo kelio $s(t)$ vienetas?

2) Kas turėtų būti parašyta vietoj daugtaškio, kad būtų teisinga lygybė:

$$980\,\mathrm{cm/s^2} = \ldots\,\mathrm{m/s^2}? \quad 1000\,\mathrm{cm/s^2} = \ldots\,\mathrm{m/s^2}?$$

Parašykite formulę laisvojo kūnų kritimo keliui $s(t)$ rasti, g reikšmę imdami $\mathrm{m/s^2}$. Nubraižykite tos funkcijos grafiko eskizą.

3) Apskaičiuokite šulinio gylį, jei krintantis akmuo dugną pasiekė po:
2 sekundžių; 3 sekundžių; 5 sekundžių.

4) Kam lygus laisvai krintančio kūno greitis, kai $t = 1$ s? $t = 2$ s? $t = 5$ s? Parašykite laisvai krintančio kūno greičio v (metrais per sekundę) priklausomybės nuo kritimo laiko t (sekundėmis) formulę.

5) Kūnas krinta iš 20 metrų aukščio. Kokį atstumą jis nukrenta per: pirmąją kritimo sekundę? 10-ąją kritimo sekundę? paskutinę kritimo sekundę?

6) Parašykite formulę laisvai krintančio kūno *aukščiui h virš Žemės* nustatyti priklausomai nuo kritimo laiko t, jei kūnas krinta iš:
a) 10 m; b) 20 m; c) 25 m; d) h_0 m.
Nubraižykite $h(t)$ grafiko eskizą.
Kam lygus kūno greitis, kai $t = 1$ s? $t = 2$ s? $t = 5$ s? Parašykite iš aukščio h_0 laisvai krintančio kūno greičio v priklausomybės nuo laiko t formulę ir nubraižykite $v(t)$ grafiką.

11.2. Kelio išvestinė

Žinodami kelio formulę $s(t)$, galime apskaičiuoti momentinį greitį $v(t)$.

Greitį v laiko momentu t (momentinį greitį) vadinsime kelio $s(t)$ išvestine.

Rašysime:

$$s'(t) = v(t).$$

Skaitysime: Es išvestinė nuo t lygu v nuo t.

Judėjimo pastoviu greičiu kelio išvestinė

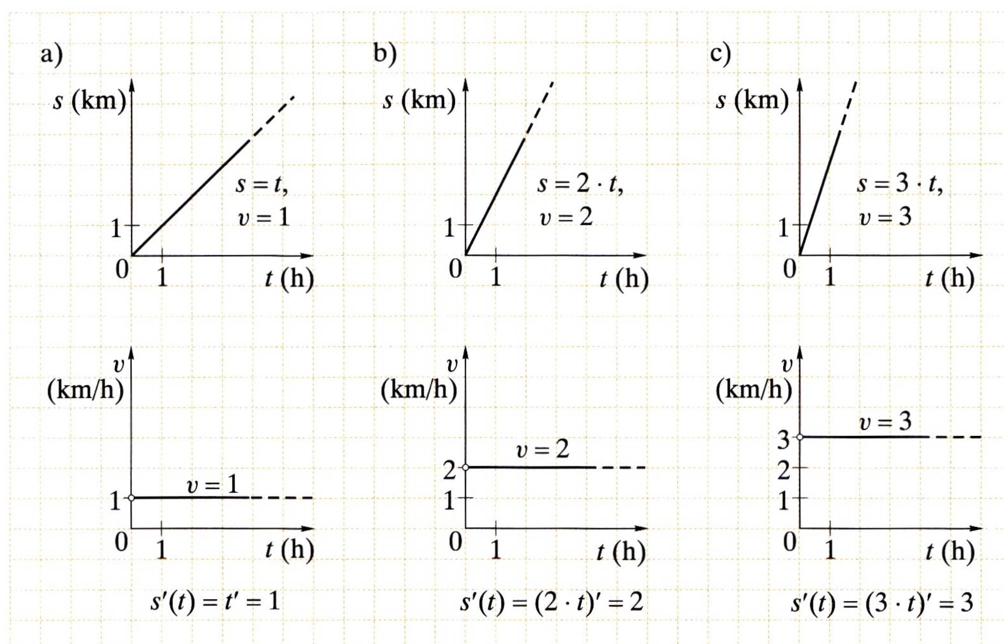
Kūno, judančio pastoviu greičiu v, kelio s formulė yra

$$s(t) = v \cdot t, \quad \text{čia } t \text{ — laikas.}$$

Kadangi greitis v kiekvienu momentu t yra vienodas, tai kelio išvestinė lygi greičiui:

$$s'(t) = v.$$

Pavyzdžiui:



Apskaičiuokite $s'(1)$, $s'(2)$, $s'(15)$, jei:
a) $s(t) = t$; b) $s(t) = 2 \cdot t$; c) $s(t) = 3 \cdot t$.

Judėjimo su pagreičiu kelio išvestinė

Kūno, judančio su pastoviu pagreičiu a, kelio formulė yra

$$s(t) = \frac{a}{2} \cdot t^2, \quad \text{čia } t \text{ — laikas.}$$

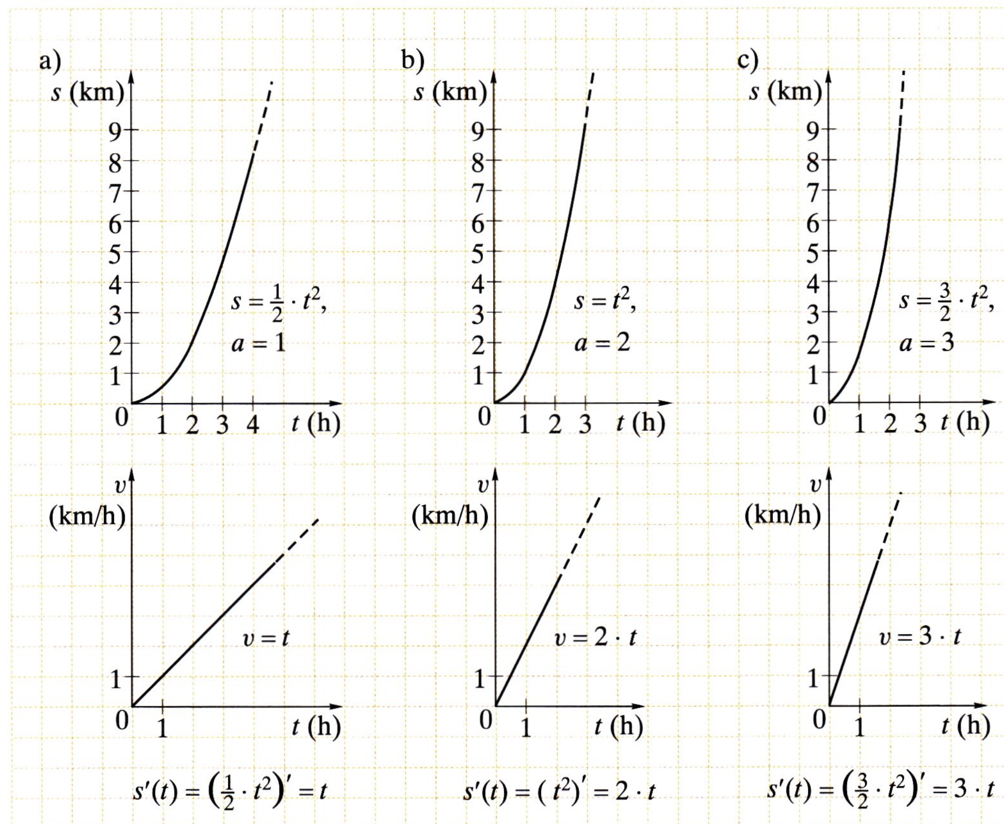
Kadangi greitis v kiekvienu laiko momentu t (momentinis greitis) lygus pagreičio ir laiko sandaugai

$$v(t) = a \cdot t,$$

tai kelio išvestinė:

$$s'(t) = a \cdot t.$$

Pavyzdžiui:



Apskaičiuokite $s'(1)$, $s'(2)$, $s'(10)$, jei:

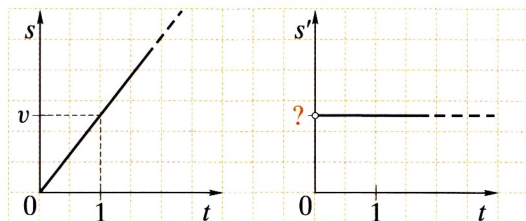
a) $s(t) = \frac{1}{2} \cdot t^2$; b) $s(t) = t^2$; c) $s(t) = \frac{3}{2} \cdot t^2$.

Pratimai ir uždaviniai

Judėjimo pastoviu greičiu kelio išvestinė

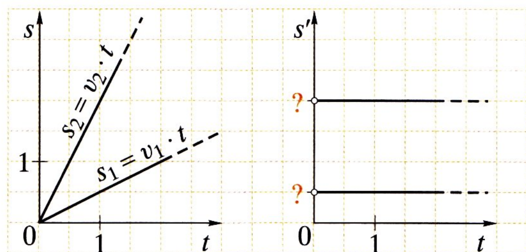
162. Kūnas, judėdamas pastoviu greičiu v (kilometrais per valandą), per laiką t (valandomis) nueina kelią s (kilometrais), lygų:
a) $s(t) = 90 \cdot t$; b) $s(t) = 50 \cdot t$; c) $s(t) = 5 \cdot t$.
1) Apskaičiuokite $s'(t)$, $s'(1)$, $s'(2)$, $s'(3)$. 2) Ką parodo $s'(t)$ ir $s'(3)$?

163. Jei kūnas juda pastoviu greičiu v, tai jo nueitas kelias s per laiką t yra lygus $s = v \cdot t$. Paveikslėlyje nubraižyti tokio judėjimo kelio $s(t)$ ir kelio išvestinės $s'(t)$ grafikų eskizai.



1) Kas turėtų būti parašyta s' ašyje vietoj klaustuko? Kaip dar galėtumėte pavadinti ašį s'?
2) Raskite tiesės: a) $s(t) = t$; b) $s(t) = 2 \cdot t$; c) $s(t) = 3 \cdot t$; d) $s(t) = v \cdot t$ su t ašimi sudaromo kampo tangentą; to kampo didumą laipsniais. Kaip to kampo tangentas susijęs su $s'(t)$? Ar gali kelio funkcijos $s = v \cdot t$, $t > 0$, išvestinė būti neigiama? Paaiškinkite kodėl.

164. Du kūnai juda skirtingais pastoviais greičiais v_1 ir v_2. Jų nuvažiuoto kelio s_1 ir s_2 bei kelio išvestinių s_1' ir s_2' grafikų eskizai pavaizduoti paveikslėlyje.



a) Kas turėtų būti parašyta s' ašyje vietoj klaustukų? Paaiškinkite kodėl.
b) Kurio kūno greitis didesnis, t. y. koks ženklas (>, <) turėtų būti parašytas vietoj kvadratėlio: v_1 ■ v_2? $s_1'(t)$ ■ $s_2'(t)$? $s_1'(2)$ ■ $s_2'(5)$?

165. Iš baseino išleidžiamo vandens aukštį h (centimetrais) priklausomai nuo laiko t (valandomis) galima apskaičiuoti remiantis formule $h(t) = -20 \cdot t + 1000$.
Raskite: $h'(1)$; $h'(2)$; $h'(30)$; $h'(t)$.

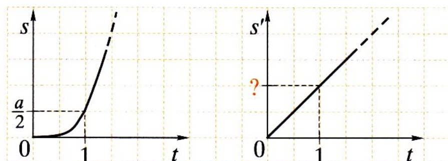


Žr. uždavinį Nr. 153.

Judėjimo su pagreičiu kelio išvestinė

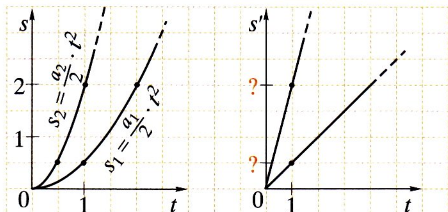
166. Kūnas juda tolygiai greitėdamas su pagreičiu a (metrais per sekundę kvadratu). Per laiką t (sekundėmis) jis nueina kelią s (metrais), lygų:
a) $s(t) = 10 \cdot t^2$; b) $s(t) = 50 \cdot t^2$; c) $s(t) = 0{,}2 \cdot t^2$.
1) Apskaičiuokite $s'(t)$; $s'(1)$; $s'(2)$; $s'(10)$.
2) Ką parodo $s'(t)$? Ką parodo $s'(5)$?
3) Koks buvo kūno momentinis greitis 5-ą sekundę?

167. Jei kūnas juda tolygiai greitėdamas su pagreičiu a, tai jo nueitas kelias s per laiką t yra lygus $s = \frac{a}{2} \cdot t^2$. Paveikslėlyje nubraižyti tokio judėjimo kelio $s(t)$ ir kelio išvestinės $s'(t)$ grafikų eskizai.



1) Kas turėtų būti parašyta s' ašyje vietoj klaustuko? Kaip dar galėtume pavadinti ašį s'?
2) Užrašykite $s'(t)$ formulę.
3) Su kuria a reikšme kūno greitis 2-ą sekundę bus lygus 10 m/s?
4) Koks turi būti a, kad kūno greitis 3-ą sekundę būtų didesnis už 12 m/s, bet mažesnis už 30 m/s?

168. Du kūnai juda su pagreičiais a_1 ir a_2. Jų nueito kelio $s_1(t)$ ir $s_2(t)$ bei kelio išvestinių $s_1'(t)$ ir $s_2'(t)$ grafikų eskizai pavaizduoti paveikslėlyje.



a) Kas turėtų būti parašyta s' ašyje vietoj klaustukų? Paaiškinkite kodėl.
b) Parašykite, kam lygu $s_1'(t)$ ir $s_2'(t)$.
c) Neskaičiavę pasakykite, kas daugiau: $s_1'(5)$ ar $s_2'(5)$.
d) Kokie buvo kūnų greičiai 10-ą sekundę?

169. a) Laisvai krintančio kūno nueitą kelią s (metrais) per laiką t (sekundėmis) galima apskaičiuoti remiantis formule $s(t) = 4{,}9 \cdot t^2$.
Raskite: $s'(t)$; $s'(1)$; $s'(10)$.
b) Iš aukščio h_0 (metrais) laisvai krintančio kūno aukštį h (metrais) virš Žemės priklausomai nuo kritimo laiko t (sekundėmis) galima apskaičiuoti remiantis formule: $h(t) = h_0 - 4{,}9 \cdot t^2$. Raskite: $h'(1)$; $h'(2)$; $h'(10)$; $h'(t)$.


Apie kūnų laisvąjį kritimą rašoma uždavinyje Nr. 161.

11.3. Daugianario išvestinė

Laipsninių funkcijų išvestinės

Kelio $s(t)$ išvestinė laiko momentu t_0 yra lygi momentiniam greičiui, t. y.

$$s'(t_0) = v(t_0).$$

Galima sakyti, kad kelio funkcijos $s(t)$ išvestinė yra greičio funkcija $v(t)$:

$$s'(t) = v(t).$$

Funkcija $s'(t)$ parodo, kokiu greičiu kinta funkcija $s(t)$.

Apskritai galima kalbėti apie bet kokios funkcijos $y = f(x)$ kitimo greitį, t. y. jos išvestinę:

$$y' = f'(x).$$

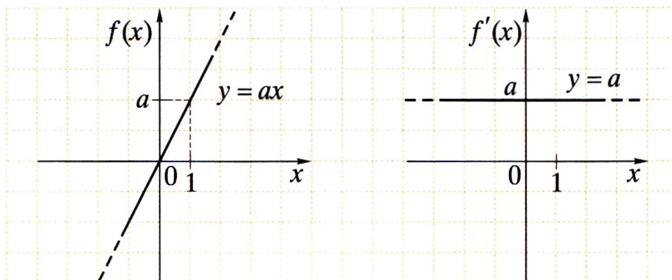
Pagal analogiją judėjimui pastoviu greičiu galime pasakyti, kam lygi funkcijos

$$f(x) = ax, \quad a \text{ — skaičius,}$$

išvestinė:

$$f'(x) = (ax)' = a.$$

$$\boxed{(ax)' = a}$$



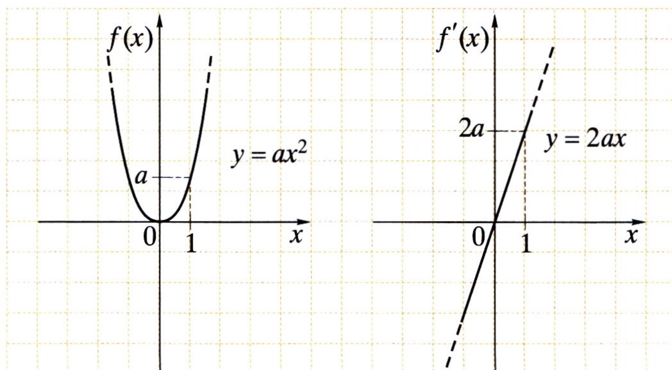
Pagal analogiją judėjimui pastoviai didėjančiu (mažėjančiu) greičiu galime pasakyti, kam lygi funkcijos

$$f(x) = ax^2, \quad a \text{ — skaičius,}$$

išvestinė:

$$f'(x) = (ax^2)' = 2ax.$$

$$\boxed{(ax^2)' = 2 \cdot ax}$$



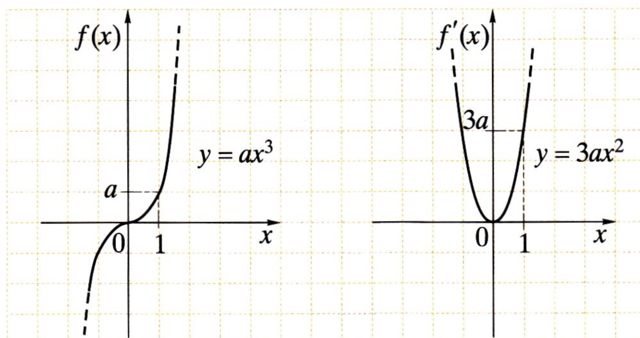
1užduotis. Pažiūrėkite, kokios yra funkcijų $f(x) = ax^3$ ir $f(x) = ax^4$ išvestinės ir pabandykite, nustatę dėsningumą, rasti funkcijos $f(x) = ax^5$ išvestinę.

Funkcijos

$$f(x) = ax^3, \quad a \text{ — skaičius,}$$

išvestinė:

$$f'(x) = (ax^3)' = 3ax^2.$$



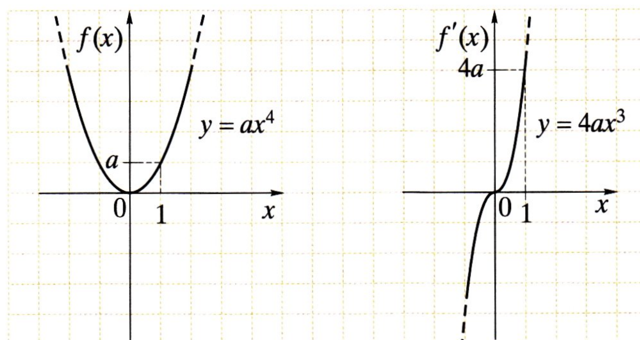
$$\boxed{(ax^3)' = 3 \cdot ax^2}$$

Funkcijos

$$f(x) = ax^4, \quad a \text{ — skaičius,}$$

išvestinė:

$$f'(x) = (ax^4)' = 4ax^3.$$



$$\boxed{(ax^4)' = 4 \cdot ax^3}$$

Apskritai laipsninės funkcijos

$$\boxed{f(x) = ax^n \text{ išvestinė } f'(x) = n \cdot ax^{n-1}}$$

Šią formulę galima taikyti su visais n (ne tik su natūraliaisiais).
Pavyzdžiui:

$$f(x) = 3x^7, \quad f'(x) = 7 \cdot 3x^{7-1} = 21x^6;$$
$$g(x) = 3x^{-2}, \quad g'(x) = -2 \cdot 3x^{-2-1} = -6x^{-3};$$
$$h(x) = 5x^{\frac{1}{3}}, \quad h'(x) = \frac{1}{3} \cdot 5x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{5}{3}x^{-\frac{2}{3}}.$$

2 užduotis. Raskite funkcijos išvestinę.

a) $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$; b) $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$; c) $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$;
d) $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$.

Daugianario išvestinė

Mokame rasti laipsninių funkcijų išvestines:

$$\boxed{f(x) = ax^n, \quad f'(x) = n \cdot ax^{n-1}} \qquad \text{pvz.,} \quad (3x^5)' = 5 \cdot 3x^{5-1} = 15x^4.$$

Taip pat nesunku suprasti, kad bet kokio skaičiaus išvestinė lygi 0. Iš tikrųjų, jei kūno nueitas kelias, bėgant laikui, nekinta, pvz., $s = 5\,\text{km}$, tai reiškia, kad tuo metu kūnas stovi — jo greitis $v = 0$, todėl $s' = 5' = 0$. Taigi bet kokio skaičiaus išvestinė lygi 0:

$$\boxed{f(x) = \text{const}, \quad f'(x) = 0} \qquad \text{pvz.,} \quad (-15)' = 0.$$

O kaip rasti, pavyzdžiui, tokios funkcijos išvestinę:

$$f(x) = 2x^3 - x^2 + 5x - 2?$$

Funkcijos reiškinys yra daugianaris, sudarytas iš narių

$$2x^3, \quad x^2, \quad 5x \quad \text{ir} \quad 2.$$

Tokių narių išvestines rasti mokame:

$$(2x^3)' = 6x^2, \quad (x^2)' = 2x, \quad (5x)' = 5, \quad 2' = 0.$$

Bet ką daryti, kai reikia rasti tų narių sumos ar skirtumo išvestinę? Remsimės tokia išvestinių skaičiavimo taisykle:

Funkcijų sumos (skirtumo) išvestinė lygi tų funkcijų išvestinių sumai (skirtumui):

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$
$$[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$$

Taigi funkcijos $f(x) = 2x^3 - x^2 + 5x - 2$ išvestinė:

$$f'(x) = (2x^3)' - (x^2)' + (5x)' - 2' = 6x^2 - 2x + 5.$$

3 užduotis. Raskite funkcijos $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$ išvestinę.

Pratimai ir uždaviniai

Laipsninių funkcijų išvestinės

170. Apskaičiuokite funkcijos išvestinę.

a) $f(x) = 3x$; b) $f(x) = -3x$; c) $f(x) = \frac{1}{3}x$;
d) $f(x) = -\frac{1}{3}x$; e) $f(x) = \sqrt{2}x$; f) $f(x) = \log_2 3 \cdot x$;
g) $f(x) = \operatorname{tg} 10^\circ \cdot x$; h) $f(x) = \lg 5 \cdot x$; i) $f(x) = x \cdot \frac{\sin 0^\circ}{2\cos 30^\circ}$.

171. Apskaičiuokite funkcijos išvestinę.

a) $f(x) = 3x^2$; b) $f(x) = -3x^2$; c) $f(x) = \sqrt{5}x^2$;
d) $f(x) = 3x^{10}$; e) $f(x) = \log_5 10 \cdot x^{15}$; f) $f(x) = \frac{x^5}{5}$;
g) $f(x) = \frac{x^6}{2\sqrt{3}}$; h) $f(x) = -\frac{x^{10}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{10}}$; i) $f(x) = \frac{\sqrt{3}x}{\cos\sqrt{3}}$.

172. Apskaičiuokite funkcijos išvestinę.

a) $f(x) = x^{-1}$; b) $f(x) = x^{-2}$; c) $f(x) = -3x^{-3}$;
d) $f(x) = \frac{x^{-5}}{5}$; e) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$; f) $f(x) = 3x^{-\frac{1}{3}}$;
g) $f(x) = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}}$; h) $f(x) = \frac{2x^{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}$; i) $f(x) = -\frac{\sin 33^\circ \cdot x^{-33}}{33}$.

173. Raskime kokio nors skaičiaus a išvestinę, remdamiesi tuo, kad

$a \cdot x^0 = a$, kai $x \neq 0$,

ir formule

$(a \cdot x^n)' = n \cdot a \cdot x^{n-1}$.

Pavyzdžiui, raskime $2'$. Skaičių 2 pakeiskime reiškiniu $2 \cdot x^0$:

$2 = 2 \cdot x^0$, nes $x^0 = 1$.

Remdamiesi formule $(a \cdot x^n)' = n \cdot a \cdot x^{n-1}$, turime:

$$(2 \cdot x^0)' = 0 \cdot 2 \cdot x^{0-1} = \frac{0}{x} = 0.$$

1) Analogiškai raskite skaičiaus -3 išvestinę.
2) Pabaikite sakinį:
Bet kokio skaičiaus išvestinė lygi ... .

174. Apskaičiuokite $f'(3)$; $f'(-3)$; $f'(0)$, jei:

a) $f(x) = 5x$; b) $f(x) = x$; c) $f(x) = -x$;
d) $f(x) = 0{,}5x^2$; e) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2$; f) $f(x) = \sqrt{2}x^2$;
g) $f(x) = 7x^7$; h) $f(x) = \log_2 5 \cdot x^{\frac{1}{2}}$; i) $f(x) = \frac{x^{-\frac{1}{3}}}{5\log_3 4}$.

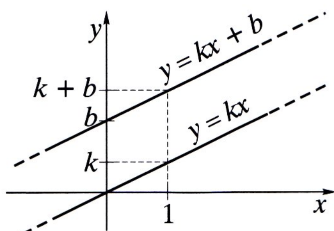
175. 1) Nubraižykite funkcijos $f(x) = kx$ grafiką, imdami k reikšmę, lygią:
a) 1; 2; 3; b) −1; −2; −3.

2) Kokia yra funkcija $f(x) = kx$: didėjanti, mažėjanti ar pastovi, kai $k > 0$? kai $k < 0$?

3) Raskite funkcijos išvestinę.
a) $f(x) = x$; $f(x) = 2x$; $f(x) = 3x$;
b) $g(x) = -x$; $g(x) = -2x$; $g(x) = -3x$.

4) Ar teisingas teiginys:
Jei funkcija $f(x) = k \cdot x$ (k — skaičius) yra didėjanti, tai jos išvestinė yra teigiama, o jei mažėjanti, tai jos išvestinė — neigiama?

5) Funkcijos $f(x) = kx + b$ grafikas yra tiesė. Ją galima gauti lygiagrečiai Oy ašiai pastūmus tiesę $g(x) = kx$ per b vienetų.



Ar teisingas teiginys:
Jei funkcija $f(x) = k \cdot x + b$ (k ir b — skaičiai, $k \neq 0$) yra didėjanti, tai jos išvestinė yra teigiama, o jei mažėjanti, tai jos išvestinė — neigiama?

Daugianario išvestinė

176. Apskaičiuokite daugianario išvestinę.

a) $f(x) = 3x^2 + x$;
b) $f(x) = 7x^3 - 0{,}1x^{10}$;
c) $f(x) = \frac{1}{2}x^{-2} + x^{-3}$;
d) $f(x) = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}} + 1$;
e) $f(x) = 5x^{\sqrt{2}+1} + 5$;
f) $f(x) = \operatorname{tg} 15^\circ - \log_2 9 + \frac{1}{x^5}$.

177. a) Raskite $f'(0)$, jei:

$$f(x) = 5x^5 + 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 - x - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}.$$

b) Raskite $f'(\sqrt{2})$, jei:

$$f(x) = 5x^2 - \sqrt{2}x - 3.$$

178. 1) Nubraižykite paraboles.
a) $y = x^2$, $y = x^2 + 2$, $y = x^2 - 3$;
b) $y = -x^2$, $y = -x^2 + 2$, $y = -x^2 - 3$.
Raskite $y'(0)$.

2) Funkcijos

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a, b, c \text{ — skaičiai, } a \neq 0)$$

grafikas yra parabolė. Parabolės viršūnės taško koordinatės yra

$$\left(-\frac{b}{2a}; \frac{-b^2 + 4ac}{4a}\right).$$

Nubraižykite parabolę:

a) $y = x^2 - 5x + 6$; b) $y = -x^2 + 3x$; c) $y = 2x^2 + 3x + 1$.

Raskite funkcijos $f(x)$ išvestinę parabolės viršūnės taške, t. y.

$$y'\left(-\frac{b}{2a}\right).$$

3) Pabaikite sakinį:

Funkcijos $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ išvestinė taške $x = -\frac{b}{2a}$ yra ... .

Gal galite tai įrodyti?

179. Nubraižykite kubinę parabolę:

a) $y = x^3$; b) $y = -x^3$; c) $y = 2x^3$; d) $y = x^3 + 2$.

Raskite $y'(0)$.

Pabaikite sakinį:

Funkcijos $f(x) = ax^3 + b$ (a, b — skaičiai, $a \neq 0$) išvestinė taške $x = 0$ yra ... .

Gal galite tai įrodyti?

180. Apytiksles sinuso ir kosinuso reikšmes galima apskaičiuoti remiantis lygybėmis:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3 \cdot 2} + \frac{x^5}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} - \frac{x^7}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} + \cdots =$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \cdots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4 \cdot 3 \cdot 2} - \frac{x^6}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} + \cdots =$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \cdots.$$

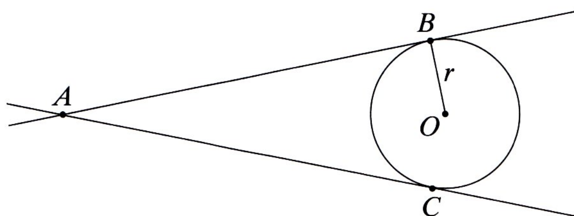
Remdamiesi šiomis lygybėmis, raskite $\sin x$ ir $\cos x$ išvestines, t. y.:

$$\sin' x = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots\right)' = \ldots,$$

$$\cos' x = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots\right)' = \ldots.$$

Palyginkite $\sin' x$ su $\cos x$ ir $\cos' x$ su $\sin x$.

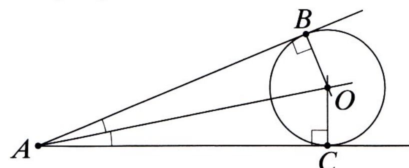
181. Nubrėžtas apskritimas su centru O ir spinduliu r. Per šalia apskritimo esantį tašką A nubrėžtos to apskritimo liestinės AB ir AC.



Apskaičiuokite:
a) AB ir AC, jei $r = 2\,\text{cm}$, $AO = 5\,\text{cm}$;
b) AO, jei $r = 1\,\text{cm}$, $AB = 3\,\text{cm}$;
c) AC, jei $r = 3\,\text{cm}$, $\angle AOB = 60^\circ$;
d) AB, AC ir AO, jei $r = 5$, $\angle BAC = 80^\circ$.



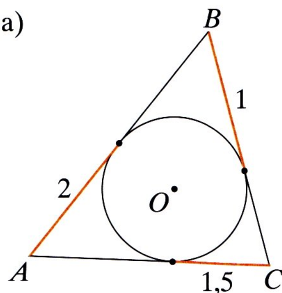
Jei tiesė su apskritimu turi tik vieną bendrą tašką, tai ta tiesė vadinama apskritimo *liestine*.
Apskritimo liestinė yra *statmena* spinduliui, nubrėžtam į lietimosi tašką.
Apskritimo liestinių, išeinančių iš vieno taško, atkarpos yra *lygios*.
Apskritimo, liečiančio abi kampo kraštines, centras yra to kampo pusiaukampinėje.



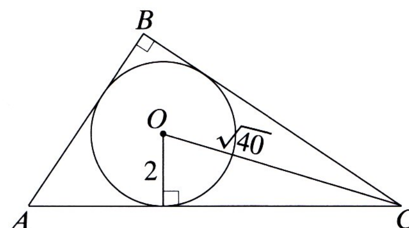
$AB \perp OB$, $AC \perp OC$;
$AB = AC$;
$\angle BAO = \angle CAO$.

182. Į trikampį ABC įbrėžtas apskritimas su centru O. Apskaičiuokite $\triangle ABC$ perimetrą.

a)



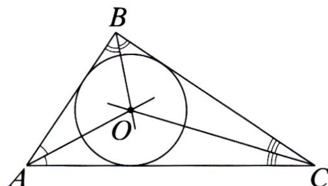
b)





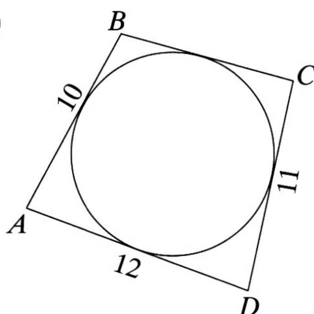
Apskritimas vadinamas *įbrėžtu* į trikampį, jei jis liečia visas trikampio kraštines.

Įbrėžto į trikampį apskritimo centras yra trikampio *pusiaukampinių* susikirtimo taškas.

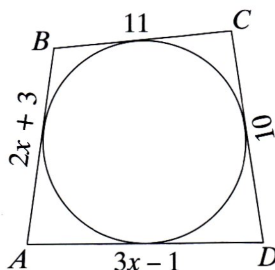


183. Apie apskritimą apibrėžtas keturkampis $ABCD$. Apskaičiuokite nežinomų keturkampio kraštinių ilgius.

a)

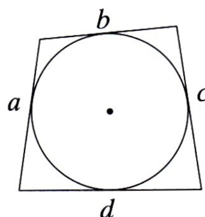


b)





Į iškiląjį keturkampį galima įbrėžti apskritimą, kai to keturkampio priešingųjų kraštinių ilgių sumos yra lygios.



$a + c = b + d$

11.5. Pasitikrinkime

184. Kūno nueitas kelias s (centimetrais) per laiką t (sekundėmis) apskaičiuojamas pagal formulę:
a) $s(t) = 2 \cdot t$; b) $s(t) = t^2$.
1) Nubraižykite $s(t)$ grafiką.
2) Kaip juda kūnas: su pagreičiu ar tolygiai?
3) Nubraižykite kūno greičio v (centimetrais per sekundę) grafiką $v(t)$.
4) Koks kūno greitis laiko momentais, kai $t = 1$ s? 2 s? 10 s?
5) Raskite $s'(t)$. Kam lygu $s'(1)$? $s'(2)$? $s'(10)$.

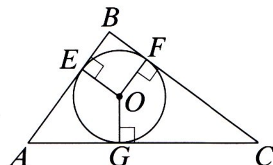
185. Raskite funkcijos išvestinę.

a) $f(x) = x$; b) $f(x) = -x$; c) $f(x) = -\frac{1}{3}x$;
d) $f(x) = \sqrt{3}x$; e) $f(x) = x^2$; f) $f(x) = -x^2$;
g) $f(x) = -0{,}5x^2$; h) $f(x) = \sqrt{3}x^2$; i) $f(x) = \frac{\sqrt{2}x^{\sqrt{2}}}{2}$.

186. Išspręskite lygtį $f'(x) = 0$, jei:
a) $f(x) = -2x^2 + x$; b) $f(x) = x^3 + 5x^2 + 1$.

187. Raskite $f'(1)$, jei:
a) $f(x) = 4x^2 - 3x$; b) $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - 1$.

188. Į trikampį ABC, kurio $AB = 9$ cm, $BC = 12$ cm, $AC = 15$ cm, įbrėžtas apskritimas.



1) Koks yra trikampis ABC pagal kampus (smailusis, statusis ar bukasis)?
2) Kam lygus $\triangle ABC$ plotas?
3) Apskaičiuokite įbrėžtinio apskritimo spindulio ilgį.
4) Apskritimas liečia trikampio kraštines taškuose E, F, G. Apskaičiuokite atkarpų EB, CF ir AG ilgius.

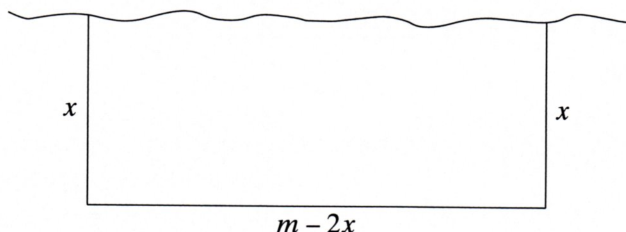
189. Ar galima į iškiląjį keturkampį $ABCD$ įbrėžti apskritimą, jei:
a) $AB = 15$ cm, $BC = 17$ cm, $CD = 20$ cm, $DA = 18$ cm?
b) $AB = 2$ cm 3 mm, $BC = 3$ cm 4 mm, $CD = 4$ cm 5 mm, $DA = 5$ cm 6 mm?

190. Iškilojo keturkampio $ABCD$ kraštinės $AB = 10$, $BC = 20$. Raskite kraštinių CD ir AD ilgius, jei žinoma, kad keturkampio perimetras $P = 60$ ir į tą keturkampį galima įbrėžti apskritimą.

Didonės uždavinys

Legenda apie Kartaginos įkūrimą pasakoja, kad finikiečių laivams priplaukus krantą, vietiniai gyventojai sutiko atvykėliams parduoti tiek žemės, kiek šie apsitvers viena jaučio oda. Finikiečių karalienė Didonė įsakė supjaustyti jaučio odą siauromis juostelėmis ir iš jų susiūti juostą. Ta juosta finikiečiai ant jūros kranto aprėpė nemažą plotą, kur ir buvo pastatytas Kartaginos uostas.

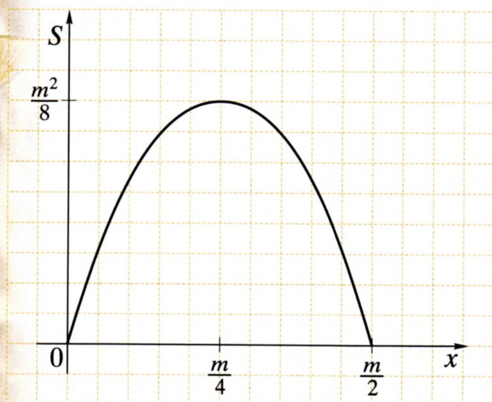
UŽDAVINYS. Ant jūros kranto ilgio m juosta reikia aprėpti stačiakampį didžiausio ploto sklypą. Kokie to sklypo matmenys?



Pažymėkime sklypo lygiųjų kraštų ilgį x, tada trečio krašto ilgis bus $m - 2x$. Stačiakampio plotas S priklauso nuo x:

$$S(x) = x \cdot (m - 2x).$$

Funkcija $S(x)$ — kvadratinė. Nubraižykime jos grafiką.



Parabolė x ašį kerta taškuose:
$x(m - 2x) = 0,$
$x_1 = 0,$
$m - 2x = 0,\ x_2 = \frac{m}{2}.$

Viršūnės koordinatės:

$x_0 = \frac{m}{2} : 2 = \frac{m}{4},$
$S(x_0) = \frac{m}{4} \cdot (m - 2 \cdot \frac{m}{4}) = \frac{m^2}{8}.$

Remdamiesi grafiku matome, kad viena ieškomo stačiakampio kraštinė turi būti lygi $\frac{m}{4}$, o kitos kraštinės ilgis $m - 2 \cdot \frac{m}{4} = \frac{m}{2}$. To stačiakampio plotas $S = \frac{m}{4} \cdot \frac{m}{2} = \frac{m^2}{8}$.
Ieškomą x reikšmę galėjome rasti ir nebraižydami grafiko, remdamiesi išvestine:

$$S'(x) = \left(mx - 2x^2\right)' = m - 4x.$$

Funkcija $S(x)$ didžiausią reikšmę įgyja taške, kuriame išvestinė lygi 0:

$$m - 4x = 0, \quad x = \frac{m}{4}.$$

Uždavinio atsakymą galima suformuluoti ir taip: trumpieji sklypo kraštai turi būti perpus trumpesni už ilgąjį kraštą.

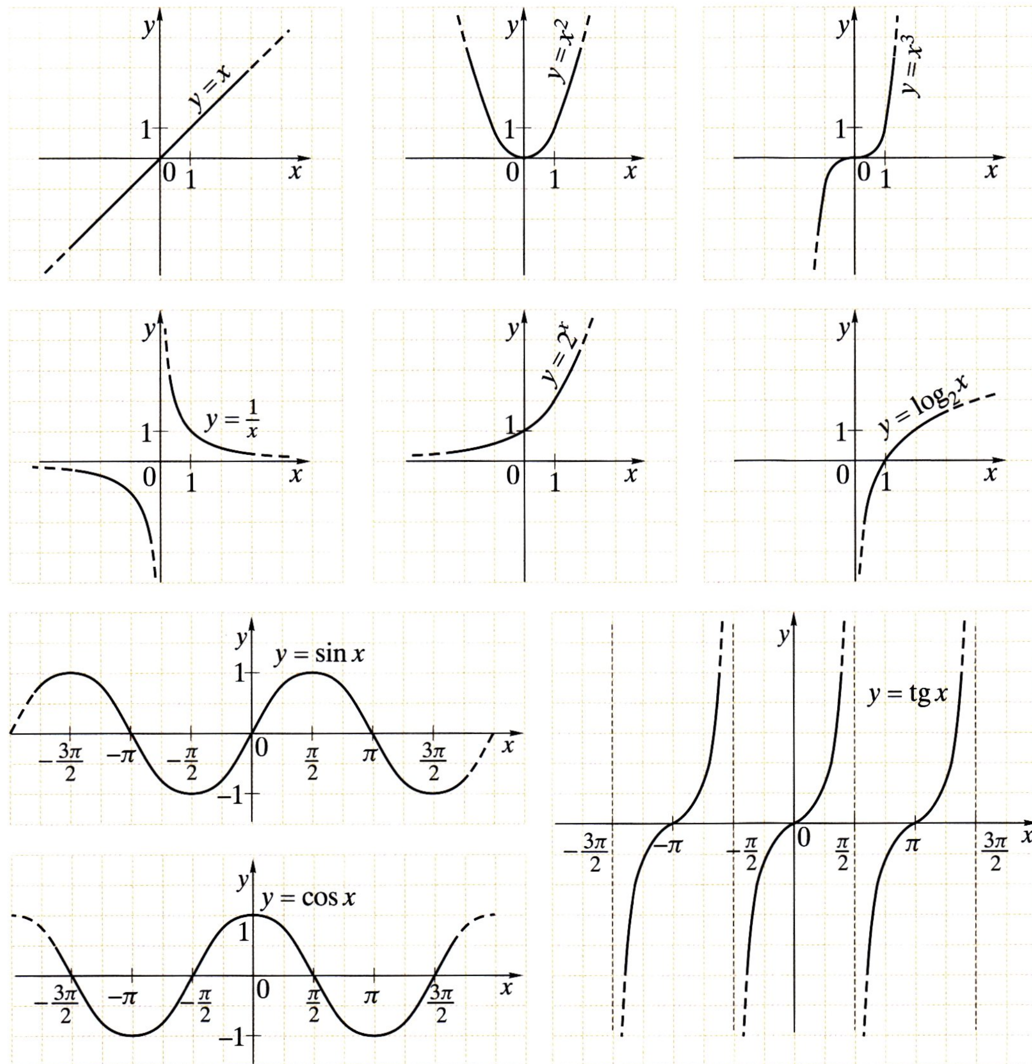
12 IŠVESTINIŲ TAIKYMAI

12.1. Funkcijos reikšmių didėjimo ir mažėjimo požymiai

Funkcijų savybes geriausiai parodo jų grafikai. Iš grafiko, pavyzdžiui, galime matyti, kur funkcijų reikšmės didėja, kur — mažėja. Didėjant x reikšmėms:

- *didėjančios* funkcijos grafikas „kyla į viršų“; y reikšmės didėja;
- *mažėjančios* — „leidžiasi žemyn“; y reikšmės mažėja.

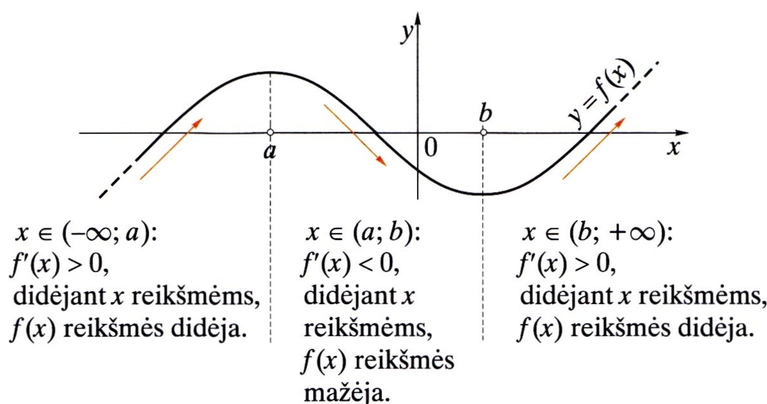
Pasakykite pavaizduotų funkcijų reikšmių didėjimo ir mažėjimo intervalus.



Funkcijos reikšmių didėjimo ir mažėjimo intervalus galima nustatyti ir nesiremiant funkcijos grafiku. Tiksliau tuos intervalus galime nustatyti remdamiesi funkcijos *išvestine*.

Yra teisingas toks teiginys:

Jei funkcijos $f(x)$ išvestinė intervale $(a; b)$ yra:
- *teigiama, tai šiame intervale funkcija yra didėjanti;*
- *neigiama, tai šiame intervale funkcija yra mažėjanti.*



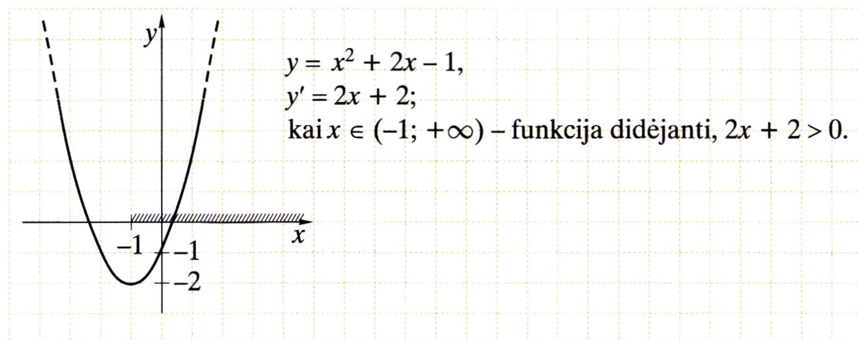
Imkime, pavyzdžiui, funkciją $f(x) = x^2 + 2x - 1$. Raskime jos išvestinę:

$$f'(x) = (x^2 + 2x - 1)' = (x^2)' + (2x)' - (1)' = 2x + 2.$$

Nustatykime, kur išvestinė yra teigiama:

$$2x + 2 > 0, \quad 2x > -2, \quad x > -1.$$

Taigi išvestinė teigiama, kai $x \in (-1; +\infty)$. Vadinasi, šiame intervale funkcija yra didėjanti.



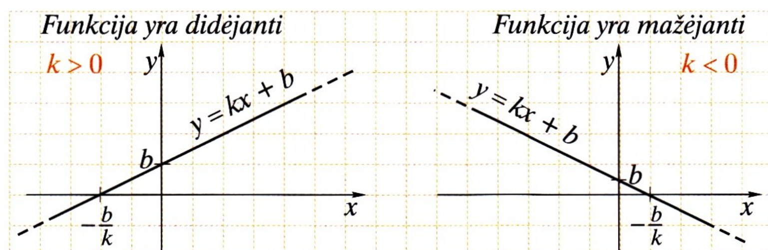
 Kokiame intervale funkcijos $f(x) = x^2 + 2x - 1$ išvestinė yra neigiama? Kokia tame intervale yra funkcija — didėjanti ar mažėjanti?

Pratimai ir uždaviniai

191. 1) Patikrinkite teiginio:
Jei $f'(x) > 0$, tai $f(x)$ yra didėjanti; jei $f'(x) < 0$, tai $f(x)$ yra mažėjanti teisingumą tiesinei funkcijai $f(x) = kx + b$, čia k ir b — skaičiai ($k \neq 0$).



1) Prisiminkite, kaip nuo k ženklo priklauso ar funkcija $f(x) = kx + b$ yra didėjanti, ar yra mažėjanti:



2) Raskite funkcijos $f(x) = kx+b$ išvestinę ir nustatykite, kaip išvestinės ženklas susijęs su k ženklu.

2) Raskite funkcijos $f(x)$ išvestinę ir, remdamiesi ja, pasakykite, didėjanti ar mažėjanti yra ta funkcija.
a) $f(x) = 2x - 5$; b) $f(x) = -7x + 1$; c) $f(x) = x + 1$; d) $f(x) = -x$.

3) Nustatykite, didėjanti ar mažėjanti yra funkcija $f(x) = kx + b$, jei jos išvestinė:
a) $f'(x) = 3$; b) $f'(x) = 5$; c) $f'(x) = -2$; d) $f'(x) = -\sqrt{2}$.
Pateikite tokių funkcijų pavyzdžių.



Funkcijų $f(x) = -x + 10$ ir $g(x) = -x - 1$ išvestinės yra $f'(x) = -1$, $g'(x) = -1$. Kadangi $f'(x)$ ir $g'(x)$ yra neigiamos su visomis x reikšmėmis, tai funkcijos $f(x)$ ir $g(x)$ yra mažėjančios.

192. 1) Raskite funkcijos $f(x)$ išvestinę. Remdamiesi išvestine, nustatykite intervalus, kuriuose funkcija yra didėjanti, kuriuose — mažėjanti.

a) $f(x) = 3x^2 + 12x - 1$; b) $f(x) = -2x^2 - x + 1$;
c) $f(x) = x^2 + 2x$; d) $f(x) = -x^2 + 4$.

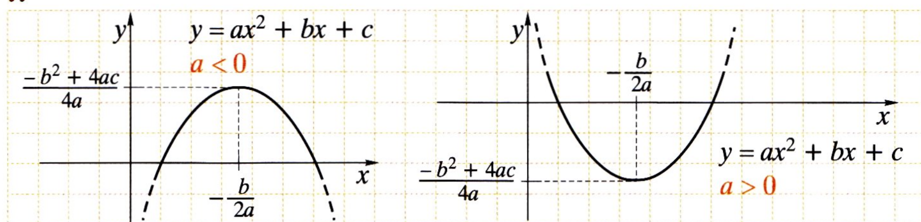
2) Įrodykite, kad funkcija $f(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c — skaičiai, $a \neq 0$) yra:
- didėjanti intervale $x \in \left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$, kai $a < 0$;
- mažėjanti intervale $x \in \left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$, kai $a < 0$;
- mažėjanti intervale $x \in \left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$, kai $a > 0$;
- didėjanti intervale $x \in \left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$, kai $a > 0$.

3) Raskite parabolių viršūnių koordinates.

a) $y = 3x^2 + 12x - 1$; b) $y = -2x^2 - x + 1$;

c) $y = x^2 + 2x$; d) $y = -x^2 + 4$.





4) Raskite 1) punkte surašytų funkcijų x_0 reikšmę, su kuria $f'(x) = 0$. Raskite taško $(x_0; f(x_0))$ koordinates. Palyginkite jas su parabolės viršūnės koordinatėmis (žr. 3) punktą).

5) Raskite funkcijos $f(x) = ax^2 + bx + c$ išvestinę. Su kuria x_0 reikšme $f'(x) = 0$? Palyginkite taško $(x_0; f(x_0))$ koordinates su parabolės viršūnės koordinatėmis (žr. 3) punktą).

193. 1) Raskite funkcijos $f(x)$ išvestinę. Remdamiesi išvestine, nustatykite, kokia yra funkcija — didėjanti ar mažėjanti.

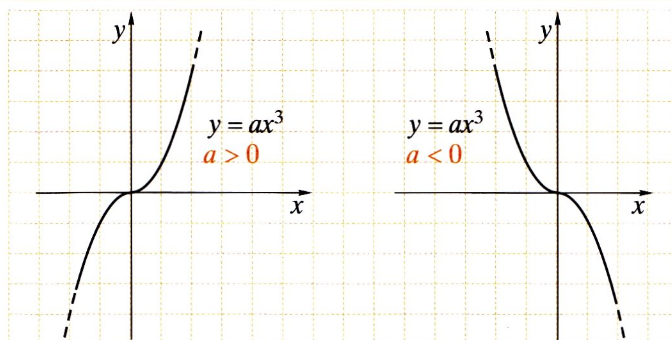
a) $f(x) = x^3$; b) $f(x) = -x^3$;

c) $f(x) = 2x^3$; d) $f(x) = -4x^3 - 5$.

Raskite x, su kuriuo $f'(x) = 0$.

2) Kaip nuo a ženklo priklauso funkcijos $f(x) = ax^3$, $a \neq 0$, išvestinės ženklas ir reikšmių didėjimas (mažėjimas)?





3) Raskite funkcijos $f(x)$ reikšmių didėjimo ir mažėjimo intervalus.

a) $f(x) = 2x^3 + 4x^2$; b) $f(x) = -5x^3 + 15x^2$;

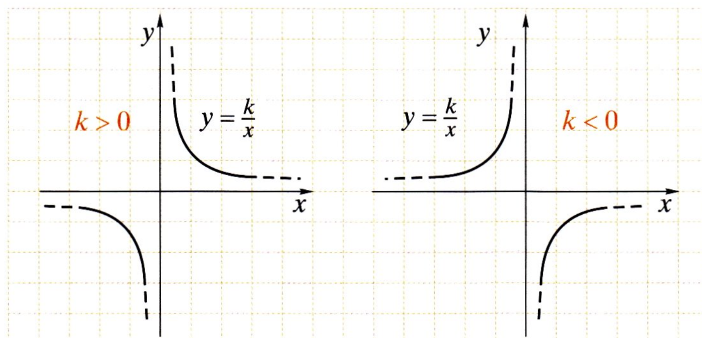
c) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 1$; d) $f(x) = -x^3 + 12x - 2$.

194. 1) Raskite funkcijos $f(x)$ išvestinę ir tos funkcijos reikšmių didėjimo ir mažėjimo intervalus.

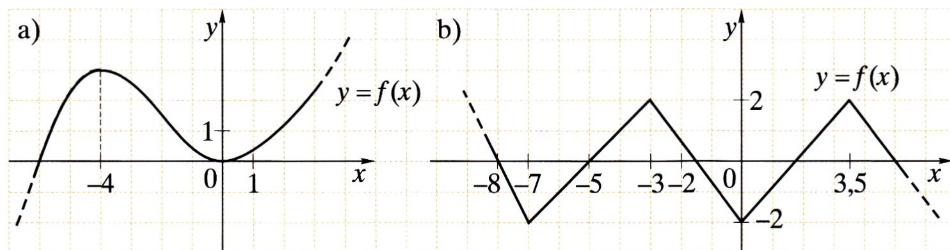
a) $f(x) = \frac{1}{x}$; b) $f(x) = \frac{3}{x}$; c) $f(x) = -\frac{1}{x}$; d) $f(x) = -\frac{3}{x}$.

2) Kaip nuo koeficiento k ženklo priklauso funkcijos $f(x) = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$, išvestinės ženklas ir reikšmių didėjimo, mažėjimo intervalai?





195. Kuriuose intervaluose funkcijos $y = f(x)$ išvestinė yra teigiama, kuriuose — neigiama?



c) $f(x) = \sin x$; d) $f(x) = \cos x$; e) $f(x) = \operatorname{tg} x$;
f) $f(x) = \log_2 x$; g) $f(x) = 2^x$.



c)–g) atvejais naudokitės brėžiniais, esančiais 114 psl.

12.2. Funkcijos ekstremumo taškai

Pažiūrėkime į funkcijos $y = f(x)$ grafiko taškus

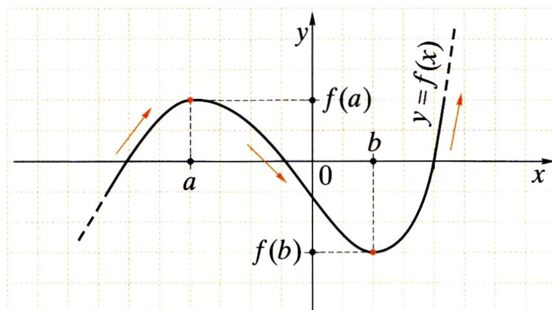
$$\big(a;\ f(a)\big) \quad \text{ir} \quad \big(b;\ f(b)\big).$$

Matome, kad kai x reikšmės didėdamos nuo $-\infty$ pereina tašką $x = a$, tai funkcijos reikšmės, pereidamos tašką $f(a)$, iki tol didėjusios, pradeda mažėti; kai x reikšmės didėdamos pereina tašką $x = b$, tai funkcijos reikšmės, pereidamos tašką $f(b)$, iki tol mažėjusios, pradeda didėti.

Kintamojo x reikšmė $x = a$ vadinama funkcijos $y = f(x)$ ***maksimumo tašku***, o reikšmė $x = b$ — ***minimumo tašku***.

Funkcijos reikšmės tuose taškuose $f(a)$ ir $f(b)$ atitinkamai vadinamos funkcijos ***maksimumu*** ir ***minimumu***.

Funkcijos minimumo ir maksimumo taškai vadinami ***ekstremumo taškais***, o funkcijos reikšmės tuose taškuose vadinamos ***ekstremumais***.



a — maksimumo taškas,
b — minimumo taškas,
a, b — ekstremumo taškai;

$f(a)$ — maksimumas,
$f(b)$ — minimumas,
$f(a)$, $f(b)$ — ekstremumai.

Funkcijos ekstremumo taškus galima rasti ir nesiremiant funkcijos grafiku, o pasitelkiant išvestinę.

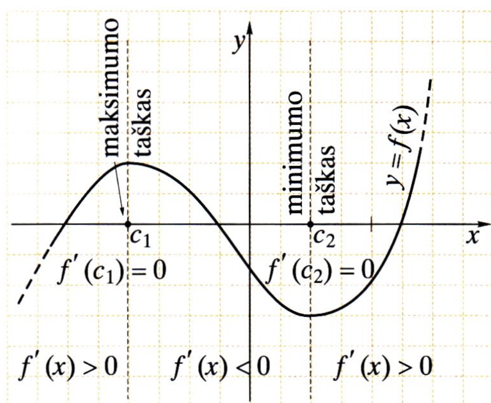
Jei, didėjant x reikšmėms, pereidamos tašką x_0, funkcijos $y = f(x)$ išvestinės reikšmės keičia ženklą:

- *iš $+$ į $-$, tai x_0 yra maksimumo taškas;*
- *iš $-$ į $+$, tai x_0 yra minimumo taškas.*

Yra teisingas toks teiginys:

Jei funkcijos $y = f(x)$ išvestinė taške c lygi 0, t. y. $f'(c) = 0$, ir yra intervalai $(a; c)$, $(c; b)$, kuriuose išvestinė $f'(x)$ yra skirtingų ženklų, tai c yra ekstremumo taškas:

- *jei $f'(x) < 0$, kai $x \in (a; c)$, o $f'(x) > 0$, kai $x \in (c; b)$, tai c — minimumo taškas;*
- *jei $f'(x) > 0$, kai $x \in (a; c)$, o $f'(x) < 0$, kai $x \in (c; b)$, tai c — maksimumo taškas.*



c_1 ir c_2 — ekstremumo taškai,
c_1 — maksimumo taškas,
c_2 — minimumo taškas.

UŽDAVINYS. Remdamiesi išvestine, raskime funkcijos $f(x) = x^2 - 4x + 5$ ekstremumo tašką ir nubraižykime funkcijos grafiko eskizą.

1) Randame $y = f(x)$ išvestinę:

$$f'(x) = (x^2 - 4x + 5)' = 2x - 4.$$

2) Randame x reikšmę, su kuria $f'(x) = 0$:

$$2x - 4 = 0, \quad 2x = 4, \quad x = 2.$$

$x = 2$ gali būti (bet gali ir nebūti!) funkcijos ekstremumo taškas.

3) Raskime x reikšmes, su kuriomis $f'(x) < 0$:

$$2x - 4 < 0, \quad 2x < 4, \quad x < 2.$$

Vadinasi, intervale $x \in (-\infty; 2)$ funkcija yra mažėjanti.
Raskime x reikšmes, su kuriomis $f'(x) > 0$:

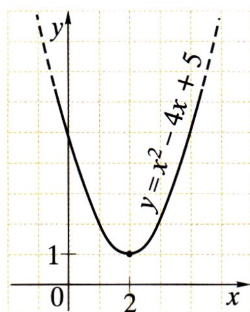
$$2x - 4 > 0, \quad 2x > 4, \quad x > 2.$$

Vadinasi, intervale $x \in (2; +\infty)$ funkcija yra didėjanti.
Taigi x reikšmėms didėjant ir pereinant tašką $x = 2$, funkcijos išvestinė keičia ženklą iš *minuso* į *pliusą*. Todėl $x = 2$ yra minimumo taškas.

4) Randame funkcijos minimumą:

$$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 5 = 1.$$

5) Nubraižome grafiko eskizą:



$f(x) = x^2 - 4x + 5$, $f'(x) = 2x - 4$;
kai $x \in (-\infty; 2)$, tai $f'(x) < 0$, — $f(x)$ mažėjanti;
kai $x \in (2; +\infty)$, tai $f'(x) > 0$, — $f(x)$ didėjanti;
kai $x = 2$, tai $f'(x) = 0$, — 2 minimumo taškas;
$f(2) = 1$, — minimumas.

Pratimai ir uždaviniai

196. 1) Raskite funkcijos:

a) $f(x) = x^2 + 2x - 1$ minimumo tašką;

b) $g(x) = -x^2 - 6x - 10$ maksimumo tašką.

2) Funkcijos reikšmė minimumo taške vadinama funkcijos *minimumu*, reikšmė maksimumo taške — *maksimumu*, reikšmė ekstremumo taške — *ekstremumu*. Raskite funkcijos:

a) $f(x) = x^2 + 2x - 1$ minimumą;

b) $g(x) = -x^2 - 6x - 10$ maksimumą.

3) Raskite funkcijų $f(x) = x^2 + 2x - 1$, $g(x) = -x^2 - 6x - 10$:

a) reikšmių didėjimo ir mažėjimo intervalus;

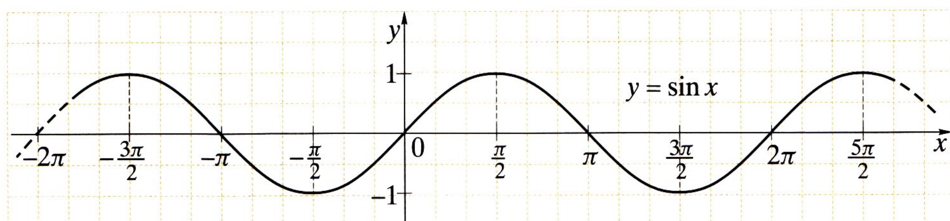
b) taškus, kuriuose jų grafikai kerta koordinačių ašis;

c) intervalus, kuriuose funkcijų reikšmės yra teigiamos, kuriuose — neigiamos.

4) Nubraižykite funkcijų $f(x) = x^2 + 2x - 1$, $g(x) = -x^2 - 6x - 10$ grafikų eskizus.

197. Funkcija gali turėti ne vieną, o daugiau ekstremumo taškų, taip pat funkcija gali ekstremumo taškų ir neturėti.

Pavyzdžiui, funkcija $f(x) = \sin x$ turi be galo daug maksimumo ir be galo daug minimumo taškų.



Taškuose $x_k = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ($k \in \mathbf{Z}$) funkcija įgyja maksimumus $f(x_k) = 1$.

Taškuose $x_m = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m$ ($m \in \mathbf{Z}$) funkcija įgyja minimumus $f(x_m) = -1$.

a) Kuriuose taškuose funkcija $f(x) = \sin x$ įgyja ekstremumus? Ar turi ekstremumo taškų funkcija $g(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$?

b) Užrašykite funkcijos $g(x) = \cos x$ minimumo taškus; maksimumo taškus; ekstremumo taškus; minimumus; maksimumus.

c) Pateikite pavyzdžių funkcijų, neturinčių ekstremumo taškų.

198. Funkcijos $y = f(x)$ ekstremumo taškų galima ieškoti taip:

1) Randame funkcijos išvestinę $f'(x)$.

2) Randame x reikšmes, su kuriomis funkcijos išvestinė lygi 0, t. y. išsprendžiame lygtį:

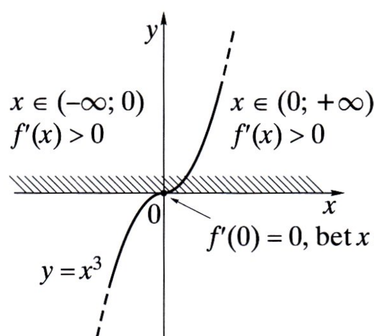
$$f'(x) = 0.$$

3) Įsitikiname, ar, pereidamos 2) punkte rastus taškus, funkcijos išvestinės reikšmės keičia ženklą:

• jei išvestinės reikšmės, pereidamos tą tašką, keičia ženklą, tai tas taškas yra ekstremumo taškas;

• jei išvestinės reikšmės ženklo nekeičia, tai tas taškas nėra ekstremumo taškas.

Pavyzdžiui, funkcija $f(x) = x^3$ ekstremumo taškų neturi, nors taške $x = 0$ jos išvestinė $f'(0) = 0$.

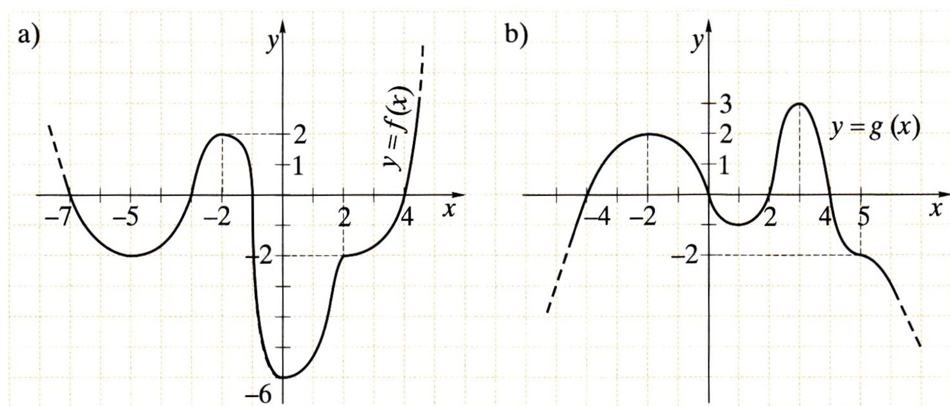


Raskite intervalus, kuriuose funkcijos reikšmės didėja, kuriuose mažėja, bei funkcijos ekstremumo taškus ir ekstremumus.

a) $f(x) = x^3 + x^2$; b) $f(x) = x^3 - 3x$;

c) $f(x) = x^3 + 3x$; d) $f(x) = x^3 - 6x^2$.

199. Pavaizduotas funkcijos grafikas:



1) Nurodykite funkcijos ekstremumo taškus, minimumo taškus, maksimumo taškus, minimumus ir maksimumus.

2) Parašykite intervalus, kuriuose:

   a) funkcija yra didėjanti; yra mažėjanti;

   b) funkcijos išvestinės reikšmės yra didesnės už 0; mažesnės už 0;

   c) funkcija įgyja teigiamas reikšmes; neigiamas reikšmes.

3) Kuriuose taškuose $g'(x) = 0$?

12.3. Funkcijos didžiausia ir mažiausia reikšmė uždarame intervale

Įsivaizduokime, kad 100 metrų ilgio tvora reikia aptverti kuo didesnio ploto stačiakampio formos sklypą. Kokie yra tokio didžiausio ploto sklypo matmenys?

Pavyzdžiui, imkime stačiakampį, kurio vienos kraštinės ilgis yra 1 m. Tada kitos jo kraštinės ilgis yra $\frac{100-2\cdot 1}{2} = 49$ m, o plotas

49 m

1 m

$$S = 1 \cdot 49 = 49\,(\mathrm{m}^2).$$

O, pavyzdžiui, imdami stačiakampį, kurio vienos kraštinės ilgis yra 10 m, turėsime:

40 m

10 m

$$S = 10 \cdot 40 = 400\,(\mathrm{m}^2).$$

1) Apskaičiuokite plotą stačiakampio, kurio perimetras lygus 100 m, o vienos kraštinės ilgis x lygus: a) 2 m; b) 5 m; c) 20 m; d) 30 m.
2) Kokias reikšmes gali įgyti x?
3) Pabandykite atspėti tokio didžiausio ploto stačiakampio kraštinės x ilgį.

UŽDAVINYS. Įsitikinkime, kad iš visų stačiakampių, kurių perimetras lygus 100 m, didžiausią plotą turi kvadratas, t. y. stačiakampis, kurio kraštinės lygios 25 m.

1) Vienos ieškomo stačiakampio kraštinės ilgį pažymėkime x. Tada kitos kraštinės ilgis bus

$$\frac{100-2x}{2} = \frac{2\cdot(50-x)}{2} = 50 - x\ (\mathrm{m}),$$

o plotas $S = x \cdot (50 - x)$:

$50 - x$

x

$$S(x) = x \cdot (50 - x) = -x^2 + 50x.$$

Gavome stačiakampio, kurio perimetras 100 m, plotą S ir kraštinės ilgį x siejančią formulę:

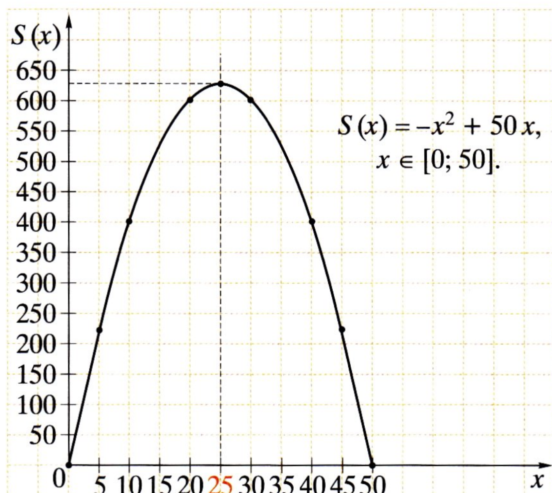
$$S(x) = -x^2 + 50x.$$

Akivaizdu, kad keičiantis x reikšmei, keičiasi ir $S(x)$ reikšmė. Mums reikia rasti tą x reikšmę, su kuria $S(x)$ reikšmė būtų didžiausia.

2) Nagrinėkime funkciją

$$S(x) = -x^2 + 50x.$$

- Ji yra apibrėžta intervale $x \in [0; 50]$, nes kraštinės ilgis x negali būti neigiamas ir negali būti didesnis už 50 m.



- Funkcijos $S(x) = -x^2 + 50x$, $x \in [0; 50]$, grafikas yra parabolė.
- Iš grafiko matome, kad didžiausią reikšmę funkcija $S(x)$ įgyja, kai $x = 25$, t. y. parabolės viršūnės taške.
- Taškas $x = 25$ yra funkcijos $S(x) = -x^2 + 50x$ maksimumo taškas.

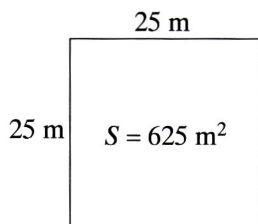
  Tą maksimumo tašką galėjome rasti ir nebraižydami parabolės, o remdamiesi tuo, kad funkcijos $S(x) = -x^2 + 50x$ išvestinė ekstremumo taške lygi 0. Raskime funkcijos $S(x)$ išvestinę:

$$S'(x) = (-x^2 + 50x)' = -2x + 50.$$

  Raskime x reikšmę, su kuria $S'(x) = 0$:

$$-2x + 50 = 0, \quad -2x = -50, \quad x = 25.$$

3) Taigi iš visų stačiakampių, kurių perimetras lygus 100 m, didžiausią plotą turi kvadratas:



$$S(x) = -x^2 + 50x;$$

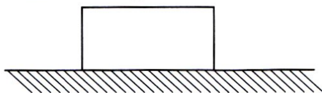
$$\max_{x \in [0;50]} (-x^2 + 50x) = 625, \text{ kai } x = 25.$$


Raskite didžiausio ploto stačiakampio matmenis, jei to stačiakampio perimetras lygus:
a) 300 m; b) P.

Pratimai ir uždaviniai

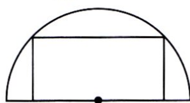
200. Skaičių 20 išreikškite dviejų teigiamų dėmenų suma taip, kad:
a) jų sandauga būtų didžiausia;
b) jų kvadratų suma būtų mažiausia;
c) jų kubų suma būtų mažiausia.
Koks būtų atsakymas, jei vietoj skaičiaus 20 imtume skaičių 200? 1000? 51? a?

201. Ūkininkas prie sienos nori įrengti stačiakampio formos aptvarą vištoms.



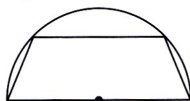
Kokį didžiausią plotą gali aptverti ūkininkas, jei turi:
a) 100 m vielinio tinklo? b) 50 m tinklo? c) a m tinklo?

202. Į pusskritulį įbrėžtas stačiakampis, kurio viena kraštinė yra pusskritulio skersmenyje.



Iš visų tokių stačiakampių raskite tą, kurio plotas yra didžiausias, jei pusskritulio spindulys lygus:
a) 10 cm; b) 5 cm; c) r.

203. Į pusskritulį įbrėžta trapecija, kurios vienas pagrindas yra pusskritulio skersmuo.



Iš visų tokių trapecijų raskite tą, kurios plotas yra didžiausias, jei pusskritulio spindulys lygus:
a) 10 cm; b) 5 cm; c) a.

204. Sodininkas nori atitverti stačiakampio formos plotą sodinukams. Jis norėtų 12 m ilgio tvorele aptverti plotą, ne mažesnį kaip 8 m^2.
a) Kokio ilgio turėtų būti stačiakampio kraštinės?
b) Kokio ilgio turėtų būti stačiakampio kraštinės, kad jo plotas būtų didžiausias?

205. Žemės ūkio institutas nustatė apytikslę priklausomybę tarp į 1 ha išbertų trąšų kiekio (kg) ir pelno pokyčio (Lt) lyginant su pelnu, gaunamu netręšiant. Šią priklausomybę galima išreikšti tokia funkcija:

$$f(x) = -0,1x^2 + 24x.$$

a) Kiek kilogramų trąšų vienam hektarui rekomenduotumėte, kad pelno pokytis būtų didesnis negu 800 Lt?
b) Kiek kilogramų trąšų vienam hektarui rekomenduotumėte, kad pelno pokytis būtų didžiausias?
c) Ar tiesa, kad, didinant išberiamų trąšų kiekį, pelno pokytis didėja?

206. Išilgai kelio reikia supilti pylimą, apsaugantį gyventojus nuo taršos ir triukšmo. Pylimo skersinis pjūvis yra parabolės formos. Tos parabolės lygtis

$$y = -\frac{1}{3}x^2 + 2x,$$

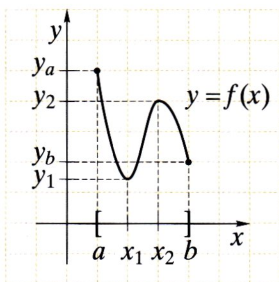
čia y — pylimo aukštis metrais, x — pylimo plotis metrais.

a) Įrodykite, kad pylimo plotis prie žemės yra 6 metrai, o didžiausias aukštis lygus 3 metrams.

b) Koks yra pylimo plotis 1 metro nuo žemės aukštyje?

c) Koks pylimo plotis didesniame negu 2 m aukštyje nuo žemės?

207. Kartais reikia nustatyti, kokią *didžiausią* arba *mažiausią* reikšmę tolydi funkcija įgyja uždarame intervale. Pažiūrėkime į funkcijos $y = f(x)$, apibrėžtos intervale $[a; b]$, grafiką.



Tolydi funkcija uždarame intervale didžiausią (mažiausią) reikšmę įgyja arba ekstremumo taške, arba viename iš intervalo galų:

$$\max_{[a;b]} f(x) = y_a, \text{ kai } x = a;$$

$$\min_{[a;b]} f(x) = y_1, \text{ kai } x = x_1.$$

Taškai x_1 ir x_2 yra funkcijos $y = f(x)$ ekstremumo taškai: taškas x_1 — minimumo, x_2 — maksimumo. Mažiausią reikšmę funkcija įgyja minimumo taške, tačiau didžiausią — intervalo $[a; b]$ gale, t. y. taške a.

Tolydi funkcija uždarame intervale didžiausią (arba mažiausią) reikšmę įgyja arba ekstremumo taške, arba intervalo pradžios ar galo taške.

Raskite funkcijos $f(x)$ didžiausią ir mažiausią reikšmes intervale. Nubraižykite brėžinį.

a) $f(x) = x^2$, $x \in [-2; 3]$;
b) $f(x) = -x^2 + 1$, $x \in [-3; 2]$;
c) $f(x) = x^3 - 3x$, $x \in [1; 2]$;
d) $f(x) = 6 + x - x^2$, $x \in [0; 2]$;
e) $f(x) = 5x$, $x \in [0; 2]$;
f) $f(x) = -3x + 4$, $x \in [-5; -1]$.

208. Raskite funkcijos $f(x)$ didžiausią ir mažiausią reikšmes intervale.

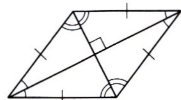
a) $f(x) = x^3 - 2x^2$, $x \in [-1; 2]$;
b) $f(x) = x(x^2 + 3)$, $x \in [-1; 2]$.

12.4. Geometrijos uždaviniai

209. Keturkampis $ABCD$ — rombas. Rombo įstrižainių ilgiai yra 12 cm ir 16 cm. Apskaičiuokite:
a) rombo kraštinių ilgius;
b) rombo plotą;
c) rombo aukštinės ilgį;
d) rombo kampus;
e) į rombą įbrėžto apskritimo spindulio ilgį.

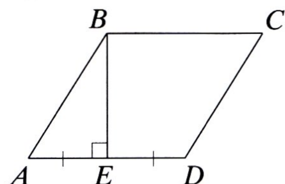


Keturkampis, kurio visos kraštinės lygios, vadinamas *rombu*.



Rombo įstrižainės rombo kampus dalija pusiau ir susikerta stačiu kampu.

210. Apskaičiuokite rombo $ABCD$ kampus.

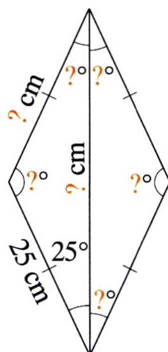


$AB = BC = CD = DA$,
$BE \perp AD$,
$AE = ED$.

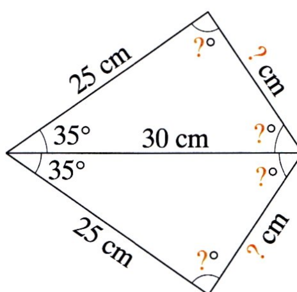
211. Rombo $ABCD$ kampas A lygus $60°$, o įstrižainė $BD = 10$ cm. Apskaičiuokite rombo:
a) kraštinių ilgius; b) įstrižainės ilgį; c) plotą.

212. 1) Kas turėtų būti parašyta vietoj klaustukų?

a)



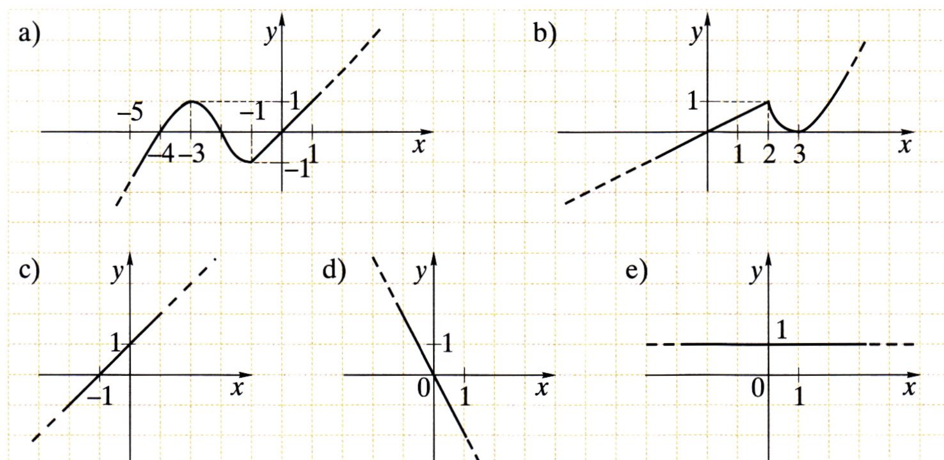
b)



2) Ar pavaizduotas keturkampis yra rombas?
3) Apskaičiuokite keturkampio nežinomos įstrižainės ilgį.
4) Apskaičiuokite keturkampio perimetrą ir plotą.

12.5. Pasitikrinkime

213. Remdamiesi brėžiniu, nurodykite intervalus, kuriuose funkcijos išvestinė yra teigiama; yra neigiama. Su kuriomis x reikšmėmis funkcija yra didėjanti? yra mažėjanti?



214. Raskite funkcijos išvestinę. Remdamiesi išvestine, nustatykite intervalus, kuriuose funkcija yra didėjanti, kuriuose — mažėjanti.

a) $f(x) = 5x + 3$; b) $f(x) = -3x + 6$;
c) $f(x) = x^2 + 2x$; d) $f(x) = -2x^2 - 5x$;
e) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$; f) $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{4}$;
g) $f(x) = 5x^2 + x + 1$; h) $f(x) = -x^2 - x - 1$;
i) $f(x) = 3x^3 + 2x^2$; j) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - 1$.

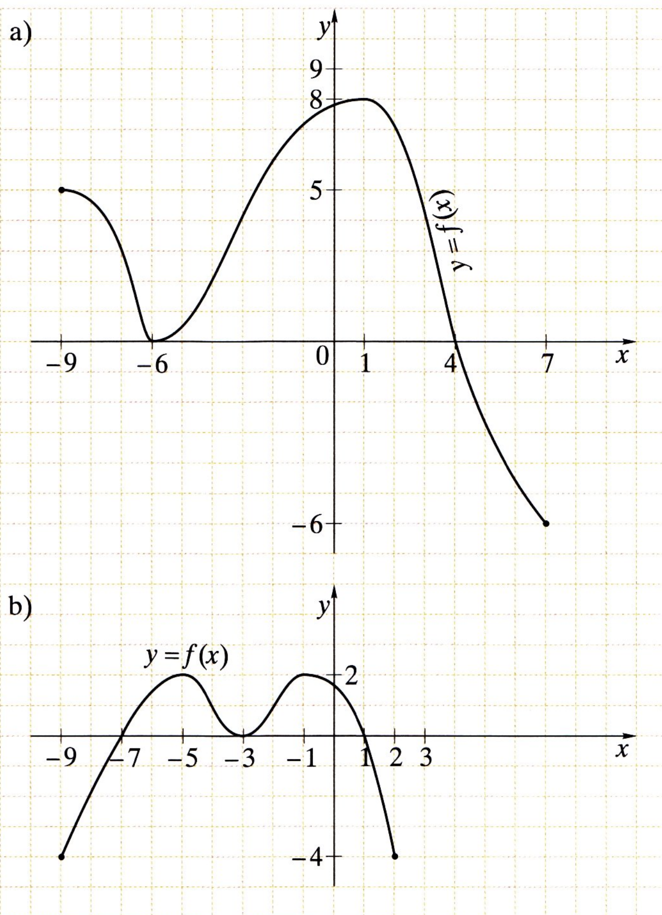
Raskite funkcijos ekstremumo taškus ir ekstremumus.

215. Stačiakampio perimetras lygus 40 cm.
a) Kokį didžiausią plotą gali turėti toks stačiakampis?
b) Kokie yra didžiausio ploto tokio stačiakampio matmenys?

216. Skaičių 100 išreikškite dviejų teigiamų dėmenų suma taip, kad jų:
a) sandauga būtų didžiausia; apskaičiuokite tą sandaugą;
b) kvadratų suma būtų mažiausia; apskaičiuokite tą sumą.

217. Raskite funkcijos $f(x)$ didžiausią ir mažiausią reikšmes intervale. Nubraižykite brėžinį.
a) $f(x) = x^2 + 2x$, $x \in [-2; 2]$;
b) $f(x) = -2x^2 + 4x$, $x \in [0; 3]$.

218. Brėžinyje pavaizduotas funkcijos $y = f(x)$ grafikas.



1) Kokia funkcijos apibrėžimo sritis? reikšmių sritis?
2) Nurodykite funkcijos ekstremumo taškus, minimumo taškus, maksimumo taškus, minimumus ir maksimumus.
3) Parašykite intervalus, kuriuose:
   - funkcija yra didėjanti; yra mažėjanti;
   - funkcijos išvestinės reikšmės yra didesnės už nulį; mažesnės už nulį;
   - funkcija įgyja teigiamas reikšmes; neigiamas reikšmes.
4) Kuriuose taškuose $f'(x) = 0$?
5) Kuriuose taškuose funkcija įgyja didžiausią reikšmę? mažiausią reikšmę? Nurodykite tas reikšmes.

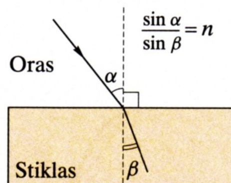
219. Rombo bukasis kampas lygus $120°$, o ilgesnioji įstrižainė lygi 10 mm. Apskaičiuokite rombo:
a) perimetrą; b) trumpesniosios įstrižainės ilgį; c) plotą.

Kokius bandymus nagrinėja tikimybių teorija?

I BANDYMAS

Per fizikos pamokas atlikote bandymą „Stiklo lūžio rodiklio nustatymas“. Visi (su nedidele paklaida) gavote, kad stiklo lūžio rodiklis

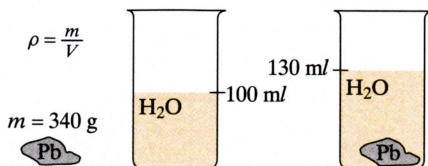
$$n = 1{,}5.$$



II BANDYMAS

Per chemijos pamokas nustatinėjote švino (Pb) tankį. Visi (su nedidele paklaida) gavote, kad švino tankis

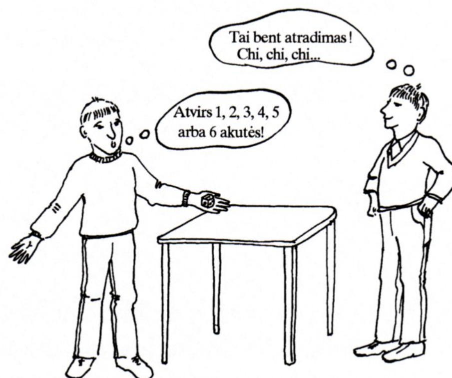
$$\rho = 11{,}3\,\mathrm{g/cm^3}.$$



III BANDYMAS

Na, o per matematikos pamoką tikriausiai mėtėte kauliuką. Ne kiekvienam atsivertė tas pats akučių skaičius. Bet tikrai jau iš anksto galėjote pasakyti, kad atvirs

1, 2, 3, 4, 5 arba 6 akutės.



Koks esminis skirtumas tarp šių bandymų?

Pirmuosius du bandymus pakartojus tomis pačiomis sąlygomis, kiekvieną kartą gaunamas *tas pats rezultatas* (su nedidele paklaida). Tokių bandymų baigtis jau iš anksto būna apibrėžta, nagrinėtuose pavyzdžiuose nulemta atitinkamų medžiagų savybių.

Trečiajam bandymui būdinga tai, kad, kartojant jį net tomis pačiomis sąlygomis, dažniausiai gaunamas vis kitas rezultatas. Paprastai neįmanoma numatyti, koks jis bus, tačiau galima išvardyti visus įmanomus atsitiktinius rezultatus (atsitiktines baigtis).

Matematikos sritis, vadinama *tikimybių teorija*, tiria bandymus, kurių konkrečios baigties dažniausiai negalima numatyti, bet galima išvardyti visas įmanomas baigtis. Svarbiausia, kad kiekvieną tokį bandymą būtų galima pakartoti kiek norima kartų.

13 TIKIMYBĖS

13.1. Atsitiktiniai įvykiai

Bandymo elementarieji įvykiai

Panagrinėkime trijų bandymų baigtis.

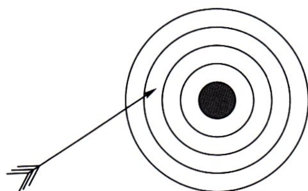
1 PAVYZDYS. Metant monetą, gali atvirsti herbas arba skaičius.



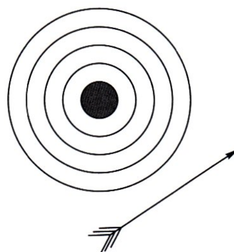


2 PAVYZDYS. Šaunant iš lanko į taikinį, galima pataikyti arba nepataikyti.

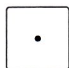
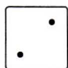
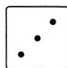
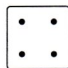
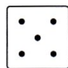
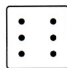
Pataikyta



Nepataikyta



3 PAVYZDYS. Metant lošimo kauliuką, gali atvirsti 1, 2, 3, 4, 5 arba 6 akutės.

Tokių bandymų visų galimų baigčių (atsitiktinių įvykių) aibė vadinama bandymo baigčių aibe arba elementariųjų įvykių aibe. Ją žymėsime raide E.

Bandymo „metama moneta ir stebima, kuria puse ji atvirto“ baigčių aibę sudaro dvi baigtys:

$$E = \{\text{atvirto herbas, atvirto skaičius}\}.$$

Galima rašyti ir taip:

$E = \{\ ,\ \}$ arba $E = \{h, s\}$.

Bandymo „iš lanko šaunama į taikinį ir stebima, ar pataikyta“ baigčių aibė

$$E = \{\text{pataikė, nepataikė}\}.$$

Kokia bandymo „metamas lošimo kauliukas ir stebima, kuo jis atvirto“ elementariųjų įvykių aibė?

Sudėtiniai įvykiai

Atliekant bandymus dažniausiai mums rūpi ne tik elementarieji įvykiai, bet ir kiti su tuo bandymu susiję *atsitiktiniai įvykiai.*

Metant kauliuką, mus gali dominti, pvz., tokie įvykiai (jie paprastai žymimi didžiosiomis raidėmis):

A — atvirto lyginis akučių skaičius 

B — atvirto daugiau nei 2 akutės 

Įvykis A įvyks, jei įvyks bent vienas iš šių elementariųjų įvykių:

atvirs arba 2, arba 4, arba 6 akutės.

Įvykis B įvyks, jei įvyks bent vienas iš šių elementariųjų įvykių:

atvirs arba 3, arba 4, arba 5, arba 6 akutės.

Rašysime taip:

$A = \{2, 4, 6\}, \quad B = \{3, 4, 5, 6\}.$

Panašiais atvejais sakoma, kad:

- įvykiui A palankūs trys elementarieji įvykiai;
- įvykiui B — keturi elementarieji įvykiai.

Įvykiai A ir B vadinami ***sudėtiniais*** įvykiais.

❓ Pateikite daugiau su kauliuko metimu susijusių sudėtinių įvykių pavyzdžių.

Įvykis, kuris negali įvykti atliekant bandymą (nėra jam palankių elementariųjų įvykių), vadinamas ***negalimuoju***.

Įvykis, kuris įvyksta kiekvieną kartą atliekant bandymą (jam palankus bet kuris elementarusis įvykis), vadinamas ***būtinuoju***.

Visi bandymo elementarieji įvykiai, kurie nėra palankūs įvykiui A, sudaro įvykiui A ***priešingąjį*** įvykį $\overline{A}$ (skaitome: ne A).

❓ Pateikite su kauliuko metimu susijusių negalimųjų, būtinųjų įvykių pavyzdžių. Suformuluokite įvykiams:

A — „atvirto lyginis akučių skaičius“,

B — „atvirto daugiau nei 2 akutės“

priešinguosius įvykius $\overline{A}$, $\overline{B}$.

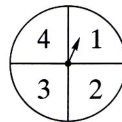
Lentelėje pateikti duomenys apie keletą bandymų ir su jais susijusius atsitiktinius įvykius.

Bandymas	Bandymo baigčių (elementariųjų įvykių) aibė	Su bandymais susijusių atsitiktinių įvykių pavyzdžiai
Metamas lošimo kauliukas ir stebimas atvirtusių akučių skaičius.	$E =$ {⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅} arba $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	A — atvirto nelyginis akučių skaičius, $A =$ {⚀, ⚂, ⚄} arba $A = \{1, 3, 5\}$. B — atvirto ne mažiau kaip trys akutės, $B =$ {⚂, ⚃, ⚄, ⚅} arba $B = \{3, 4, 5, 6\}$.
Metama moneta ir stebima, kuria puse ji atvirto.	$E =$ {herbas, 20 centų} arba $E = \{h, s\}$	C — moneta atvirto herbu arba skaičiumi, $C =$ {herbas, 20 centų} arba $C = \{h, s\}$. D — moneta atvirto herbu ir skaičiumi (nėra baigčių, palankių šiam bandymui), $D = \varnothing$.
Iš 24 kortų kaladės traukiama viena korta ir stebima, kokia ji.	$E =$ {9♥, 10♥, B♥, D♥, K♥, T♥, 9♠, 10♠, B♠, D♠, K♠, T♠, 9♦, 10♦, B♦, D♦, K♦, T♦, 9♣, 10♣, B♣, D♣, K♣, T♣}	F — ištrauktas tūzas, $F =$ {T♥, T♠, T♦, T♣}. G — ištrauktas kryžius, $G =$ {9♣, 10♣, B♣, D♣, K♣, T♣}.

Kurie iš lentelėje pateiktų įvykių yra būtinieji; negalimieji? Suformuluokite įvykiams A, B, F ir G priešinguosius įvykius ir nurodykite jiems palankių baigčių skaičių.

Pratimai ir uždaviniai

220. Užrašykite bandymo elementariųjų įvykių aibę.



a) Loterijos rato (žr. pav.) rodyklė įsukama ir stebima, ties kuriuo skaičiumi ji sustojo.

b) Metamos dvi skirtingos monetos (5 centų ir 2 centų vertės) ir stebima, kuria puse jos atvirto.

c) Metamos trys skirtingos monetos ir stebima, kuria puse jos atvirto.

d) Metami du skirtingų spalvų lošimo kauliukai ir stebima, kuo jie atvirto.

221. Metami du skirtingų spalvų lošimo kauliukai ir skaičiuojama atvirtusių akučių suma. Sudarykite šio bandymo elementariųjų įvykių aibę. Nurodykite elementariuosius įvykius, palankius įvykiams:

A — atvirtusių akučių suma yra skaičiaus 3 kartotinis;

B — atvirtusių akučių suma yra didesnė už 8;

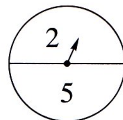
C — atvirtusių akučių suma yra mažesnė už 6.

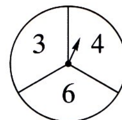
222. Metami du skirtingų spalvų lošimo kauliukai ir skaičiuojama atvirtusių akučių sandauga. Sudarykite šio bandymo elementariųjų įvykių aibę. Nurodykite elementariuosius įvykius, palankius įvykiams:

A — atvirtusių akučių sandauga yra pirminis skaičius;

B — atvirtusių akučių sandauga yra natūraliojo skaičiaus kvadratas.

223. Įsukus abi rodykles, sustojusios jos parodo po savo skaičių. Skaičiuojama rodyklių parodytų skaičių:
a) suma; b) sandauga.
Surašykite bandymo elementariuosius įvykius.





224. Ant trijų kortelių po vieną užrašyti skaitmenys [1] [2] [3]. Kortelės užverčiamos ir sumaišomos. Atverčiama viena kortelė ir dedama ant stalo, po to atverčiama kita kortelė ir dedama šalia atverstos pirmos kortelės iš dešinės. Gaunamas dviženklis skaičius. Kiek tokiu būdu iš viso galima gauti dviženklių skaičių? Surašykite juos.

225. Iš skaitmenų 1, 2, 3 ir 4 sudaromi visi galimi:
a) dviženkliai skaičiai; b) triženkliai skaičiai.
Kiek jų galima sudaryti iš viso, jei skaitmenys skaičiuje negali kartotis?

226. Iš skaitmenų 0, 1 ir 2 sudaromi visi galimi:
a) dviženkliai skaičiai; b) triženkliai skaičiai.
Kiek jų galima sudaryti iš viso? Uždavinį išspręskite dviem atvejais — kai skaitmenys skaičiuje gali kartotis ir kai nesikartoja.

227. Stebint krepšininko metimus fiksuojama: „pataikė“, „nepataikė“. Užrašykite visas galimas baigtis, jei krepšininkas į krepšį metė: a) 2 kartus; b) 3 kartus. Čia svarbus ne tik pataikytų metimų skaičius, bet ir pataikymų eilės tvarka.

228. Vienoje dėžėje yra raudonas, baltas ir juodas, o kitoje — žalias, geltonas ir mėlynas kamuoliai. Iš abiejų dėžių nežiūrint paimama po vieną kamuolį. Kokios galimos šio bandymo baigtys?

13.2. Įvykio tikimybė

Kaip apskaičiuoti įvykio tikimybę?

Atlikdami bandymus ir stebėdami atsitiktinius įvykius, dažniausiai siekiame nustatyti, kokia galimybė įvykti vienam ar kitam įvykiui.

Panagrinėkime du su kauliuko mėtymu susijusius įvykius:

A — atvirto lyginis akučių skaičius 

B — atvirto ne mažiau kaip trys akutės 

Įvykiui A palankios 3 baigtys, o įvykiui B — 4 baigtys:

$$A = \{2, 4, 6\}; \qquad B = \{3, 4, 5, 6\}.$$

Galima spėti, kad įvykis A yra mažiau galimas negu įvykis B, nes įvykiui A palankūs 3, o įvykiui B — 4 elementarieji įvykiai iš 6. Skirtingos šių įvykių galimybės įvertinamos skaičiuojant jų tikimybes.

Jei yra n vienodai galimų bandymo baigčių ir m iš jų palankios įvykiui A, tai įvykio A tikimybe vadiname skaičių $\frac{m}{n}$.

$$\mathbf{P}(A) = \frac{m}{n} = \frac{\textit{stebimam įvykiui A palankių bandymo baigčių skaičius}}{\textit{visų galimų bandymo baigčių skaičius}}$$

Šis apibrėžimas vadinamas klasikiniu įvykio tikimybės apibrėžimu. Mūsų nagrinėtų įvykių A ir B tikimybės:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \qquad \mathbf{P}(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Kadangi

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3},$$

tai įvykis A mažiau tikėtinas nei įvykis B.

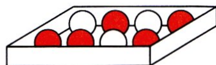
Atkreipiame dėmesį, kad klasikinis įvykio tikimybės apibrėžimas taikomas tik tada, kai bandymo baigčių yra baigtinis skaičius ir jos yra vienodai galimos; toliau nagrinėsime tik tokius bandymus.

Pavyzdžiui, metant monetą yra vienodai galimybių atvirsti herbui arba skaičiui; metant kauliuką, yra vienodai galimybių atvirsti bet kuriai iš 6 sienų.

Skaičiuodami įvykio tikimybę pagal klasikinį apibrėžimą (kai elementarieji įvykiai — bandymo baigtys — vienodai galimi):

- nustatome visų bandymo baigčių skaičių n;
- randame palankių nagrinėjamam įvykiui baigčių skaičių m;
- apskaičiuojame įvykio tikimybę: $\mathbf{P}(A) = \frac{m}{n}$.

1 UŽDAVINYS. Dėžėje yra 3 balti ir 5 rusvi rutuliai. Nežiūrint traukiamas vienas rutulys. Kokia tikimybė, kad ištrauktas rutulys yra baltas?



Sprendimas.

1) Pažymėkime raide A įvykį, kad iš dėžės ištrauktas rutulys yra baltas.
2) Dėžėje iš viso yra $3+5=8$ rutuliai. Traukiant vieną rutulį, iš viso yra 8 galimos baigtys. Vadinasi,

$$n = 8.$$

3) Kadangi baltų rutulių yra 3, tai įvykiui A yra palankios 3 baigtys. Vadinasi,

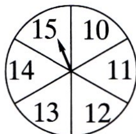
$$m = 3.$$

4) Tikimybė, kad ištrauktas rutulys yra baltas

$$\mathbf{P}(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{8}.$$

Atsakymas. $\frac{3}{8}$.

2 UŽDAVINYS. Ratas padalytas į 6 vienodas dalis (išpjovas). Dalys sunumeruotos skaičiais nuo 10 iki 15. Įsukus rodyklę, sustojusi ji parodo vieną iš užrašytų skaičių.



Rodyklė sukama vieną kartą ir stebima, ties kuriuo skaičiumi ji sustojo. Apskaičiuokime tikimybę įvykio A — rodyklės parodytas skaičius yra 3 kartotinis.

Sprendimas.

1) Rodyklė gali sustoti bet kuriame iš šešių sektorių, t. y. elementariųjų įvykių aibę sudaro 6 elementarieji įvykiai:

$$E = \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}, \quad n = 6.$$

2) Iš užrašytų skaičių tik du yra 3 kartotiniai — tai 12 ir 15. Vadinasi,

$$A = \{12, 15\}, \quad m = 2.$$

3) Ieškomoji tikimybė

$$\mathbf{P}(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Atsakymas. $\frac{1}{3}$.

Pratimai ir uždaviniai

229. Autobusų parke yra 280 autobusų, iš kurių 40 yra naujo modelio, o kiti — seno. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai paskirtas į maršrutą autobusas bus:
a) naujo modelio? b) seno modelio?

230. Lėkštėje yra 3 rūšių pyragaičiai: 6 su aguonomis, 8 su razinomis ir 4 su saulėgrąžomis. Laura nežiūrėdama paima vieną pyragaitį. Kokia tikimybė, kad Laura paėmė pyragaitį:
a) su aguonomis? b) su razinomis? c) su saulėgrąžomis?
d) su aguonomis arba su razinomis? e) su razinomis arba su saulėgrąžomis?

231. Vienoje dėžėje yra 18 baltų, 15 raudonų ir 13 juodų rutulių, o kitoje — 12 baltų ir 16 raudonų rutulių. Iš kiekvienos dėžės nežiūrėdami traukiame po vieną rutulį.
a) Apskaičiuokite tikimybes įvykių:
A — iš pirmos dėžės ištrauktas baltas rutulys;
B — iš pirmos dėžės ištrauktas raudonas arba juodas rutulys;
C — iš pirmos dėžės ištrauktas ne raudonas rutulys;
D — iš antros dėžės ištrauktas baltas rutulys;
E — iš antros dėžės ištrauktas juodas rutulys.
b) Kurią dėžę rinktumėtės, jei su draugu žaistumėte žaidimą „laimi tas, kuris pirmas ištraukia baltą rutulį“ (draugas rutulius traukia iš kitos dėžutės)? Kodėl?



Būtinojo įvykio tikimybė lygi 1, t. y. **P**(būtinojo įvykio) $= \frac{n}{n} = 1$.
Negalimojo įvykio tikimybė lygi 0, t. y. **P**(negalimojo įvykio) $= \frac{0}{n} = 0$.

232. Metamos dvi monetos ir stebima, kuria puse jos atvirto. Surašykite visus galimus šio bandymo elementariuosius įvykius. Apskaičiuokite tikimybes įvykių:
A — abi monetos atvirto skaičiumi;
B — nei viena moneta neatvirto skaičiumi;
C — bent viena moneta atvirto skaičiumi.

233. Metamos trys monetos — 10, 20 ir 50 centų vertės, ir skaičiuojama atvirtusių centų suma. Apskaičiuokite tikimybes įvykių:
A — atvirtusių centų suma yra didesnė už 20;
B — atvirtusių centų suma yra skaičiaus 3 kartotinis;
C — atvirtusių centų suma yra ne didesnė už 50;
D — atvirtusių centų suma yra ne mažesnė už 50.

234. Ant kortelių po vieną surašyti skaičiai nuo 1 iki 25. Kortelės apverčiamos ir sumaišomos. Tada nežiūrint traukiama viena kortelė. Kokia tikimybė, kad ant ištrauktos kortelės užrašytas skaičius yra:

a) pirminis? b) sudėtinis? c) vienaženklis? d) dviženklis?
e) triženklis? f) dalus iš 2? g) dalus iš 3? h) dalus iš 5?

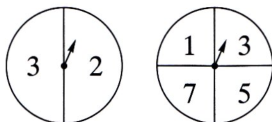
235. Metami du lošimo kauliukai ir skaičiuojama atvirtusių akučių suma. Apskaičiuokite tikimybę įvykio, kad atvirtusių akučių suma yra:
a) lygi 7; b) mažesnė už 7; c) didesnė už 7; d) lyginis skaičius;
e) pirminis skaičius; f) natūraliojo skaičiaus kvadratas.



Elementariųjų įvykių aibę patogu surašyti lentele:

+	**1**	**2**	...	**6**
1	2	3		7
2	2	3		7
⋮				
6	7	8		12

236. Įsukus abi rodykles, sustojusios jos parodo po savo skaičių.



Kokia tikimybė, kad rodyklių parodytų skaičių:
a) suma yra nelyginis skaičius? b) suma yra ne didesnė už 6?
c) sandauga yra lyginis skaičius? d) sandauga yra ne mažesnė už 7?

237. Į dėžutę sumestos 4 kortelės, ant kurių užrašyti skaičiai 2, 4, 5 ir 6. Nežiūrint viena po kitos traukiamos dvi kortelės ir dedamos viena šalia kitos. Tokiu būdu gaunamas dviženklis skaičius. Surašykite visus taip galimus gauti dviženklius skaičius. Apskaičiuokite tikimybes įvykių:
A — gautas skaičius yra lyginis; B — gautas skaičius yra nelyginis;
C — gautas skaičius yra 5 kartotinis; D — gautas skaičius nesidalija iš 3.

238. 1) Iš skaitmenų 1, 2 ir 3 sudaromi dviženkliai skaičiai, kuriuose:
a) skaitmenys nesikartoja; b) skaitmenys gali kartotis.
Surašykite visus tokius skaičius.
2) Atsitiktinai užbraukiame vieną iš užrašytų skaičių. Apskaičiuokite tikimybę, kad užbrauktas skaičius yra:
a) 2 kartotinis; b) 3 kartotinis; c) sudėtinis ir ne mažesnis už 13.

239. Iš skaitmenų 0, 1 ir 2 sudaromi dviženkliai skaičiai, kuriuose:
1) skaitmenys nesikartoja; 2) skaitmenys gali kartotis.
Surašykite visus tokius skaičius.
Apskaičiuokite tikimybę, kad atsitiktinai iš sąrašo parinktas skaičius:
a) dalijasi iš 2; b) dalijasi iš 5; c) dalijasi iš 10; d) dalijasi ir iš 2, ir iš 3.

240. Iš skaitmenų 1, 2 ir 3 sudaromi triženkliai skaičiai, kuriuose skaitmenys nesikartoja. Surašykite visus tokius skaičius.
Atsitiktinai parenkame vieną skaičių iš sąrašo. Kokia tikimybė, kad jis:
a) yra didesnis už 200?
b) prasideda lyginiu, o baigiasi nelyginiu skaitmeniu?
c) ir prasideda, ir baigiasi nelyginiu skaitmeniu?

241. 1) Ar gali įvykio A tikimybė $\mathbf{P}(A)$ būti: a) neigiama? b) didesnė už 1?
2) Pabaikite dvigubąją nelygybę: ... $\leqslant \mathbf{P}(A) \leqslant$ ... .

242. Apskaičiuokite $\mathbf{P}(\overline{A})$, jei: a) $\mathbf{P}(A) = \frac{2}{17}$; b) $\mathbf{P}(A) = 0{,}96$; c) $\mathbf{P}(A) = 0$.



Vienas kitam priešingųjų įvykių tikimybių suma lygi 1, t. y.:
$\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(\overline{A}) = 1$.

243. Tikimybė, kad elektros lemputė perdegs per mėnesį, lygi 0,13. Kokia tikimybė, kad lemputė neperdegs per mėnesį?

244. Dėžutėje yra 5 mėlyni, 8 žali ir 12 baltų kubelių. Nežiūrėdami traukiame vieną kubelį. Mus domina įvykiai:
A — ištrauktas mėlynas kubelis,
B — ištrauktas žalias kubelis,
C — ištrauktas mėlynas arba baltas kubelis,
D — ištrauktas žalias arba baltas kubelis,
E — ištrauktas kubelis nėra mėlynas.
Kurie iš šių įvykių yra vienas kitam priešingi? Apskaičiuokite jų tikimybes.

245. Skaičiuodami kai kurių įvykių tikimybes, galime susidurti su sunkumais, dėl kurių negalėsime pritaikyti klasikinio įvykio tikimybės apibrėžimo. Nagrinėkime bandymą: „šaulys šauna iš lanko į taikinį ir stebima, ar pataikė“. Šiuo atveju elementarieji įvykiai „pataikė“, „nepataikė“ nėra vienodai galimi.
Būna, kad neįmanoma nustatyti elementariųjų įvykių skaičiaus, pavyzdžiui, moneta mėtoma tol, kol tris kartus iš eilės atsiverčia herbas.
Tada naudojamas kitas nežinomos įvykio tikimybės įvertinimo būdas. Jis vadinamas *statistiniu įvykio tikimybės apibrėžimu*. Jo esmė tokia: daug kartų kartojamas bandymas ir stebima, kaip dažnai dominantis įvykis pasikartoja. Jei didinant bandymų skaičių šis dažnis stabilizuojasi ties kokiu nors skaičiumi, tai jis ir laikomas tiriamo įvykio statistine tikimybe.
Aišku, tai įmanoma padaryti tik tada, kai bandymą galima pakartoti daug kartų vienodomis sąlygomis.



1. Jei žinoma, kad šaulys iš 1000 bandymų pataikė 600 kartų, galima teigti, kad šaulio pataikymo tikimybė lygi $\frac{600}{1000} = 0{,}6$.

2. Norėdami įvertinti brokuotos elektros lemputės pagaminimo tikimybę, turėtume patikrinti didelį skaičių lempučių ir nustatyti, kiek iš jų yra brokuotų. Jei, pavyzdžiui, iš 1200 patikrintų lempučių 80 būtų brokuotų, tai brokuotos lemputės pagaminimo tikimybė lygi $\frac{80}{1200} = \frac{1}{15}$.

3. Žinome, kad idealiai simetriškos monetos tikimybė atvirsti skaičiumi, lygi $\frac{1}{2}$. Norėdami įvertinti skaičiaus atvirtimo tikimybę metant nesimetrišką, sulankstytą monetą, turėtume ją mesti labai daug kartų ir skaičiuoti, kiek kartų atsivers skaičius.

Atlikite eksperimentą — meskite nesimetrišką (pvz., sulenktą) monetą 100 kartų ir įvertinkite skaičiaus atsivertimo tikimybę.

13.3. Rinkiniai

Kaip nustatyti rinkinių skaičių?

Skaičiuojant įvykio tikimybę pagal klasikinį apibrėžimą, būtina apskaičiuoti visų elementariųjų įvykių skaičių ir nagrinėjamam įvykiui palankių įvykių skaičių.
Dažnai bandymų baigtys yra tam tikrų elementų — skaičių, raidžių ir kt. — rinkiniai. Norėdami apskaičiuoti, kiek jų yra, galime taikyti įvairius būdus: *surašyti visus elementariuosius įvykius*; *braižyti galimybių medį*; *taikyti daugybos taisyklę*.

PAVYZDYS. Metame du skirtingų spalvų (baltą ir juodą) lošimo kauliukus ir stebime, kuriuo akučių skaičiumi jie atvirto. Raskime bandymo elementariųjų įvykių skaičių.
Šiuo atveju nesunku visus elementariuosius įvykius *surašyti.* Patogu tą daryti užpildant lentelę:

	1	2	3	4	5	6
1	(1, **1**)	(1, **2**)	(1, **3**)	(1, **4**)	(1, **5**)	(1, **6**)
2	(2, **1**)	(2, **2**)	(2, **3**)	(2, **4**)	(2, **5**)	(2, **6**)
3	(3, **1**)	(3, **2**)	(3, **3**)	(3, **4**)	(3, **5**)	(3, **6**)
4	(4, **1**)	(4, **2**)	(4, **3**)	(4, **4**)	(4, **5**)	(4, **6**)
5	(5, **1**)	(5, **2**)	(5, **3**)	(5, **4**)	(5, **5**)	(5, **6**)
6	(6, **1**)	(6, **2**)	(6, **3**)	(6, **4**)	(6, **5**)	(6, **6**)

Iš viso yra 36 elementarieji įvykiai — 36 rinkiniai po 2 elementus.

Daugybos taisyklė

Elementariųjų įvykių skaičių galėjome gauti ir greičiau — taikydami *daugybos taisyklę*.

Galimybių pasirinkti elementų porą skaičius lygus galimybių pasirinkti pirmąjį elementą skaičiaus ir galimybių pasirinkti antrąjį elementą skaičiaus sandaugai.

I elemento pasirinkimo galimybių skaičius × II elemento pasirinkimo galimybių skaičius = Galimybių pasirinkti elementų porą skaičius

Pastaba. Ši taisyklė tinka ir rinkiniams, sudarytiems iš daugiau negu dviejų elementų.

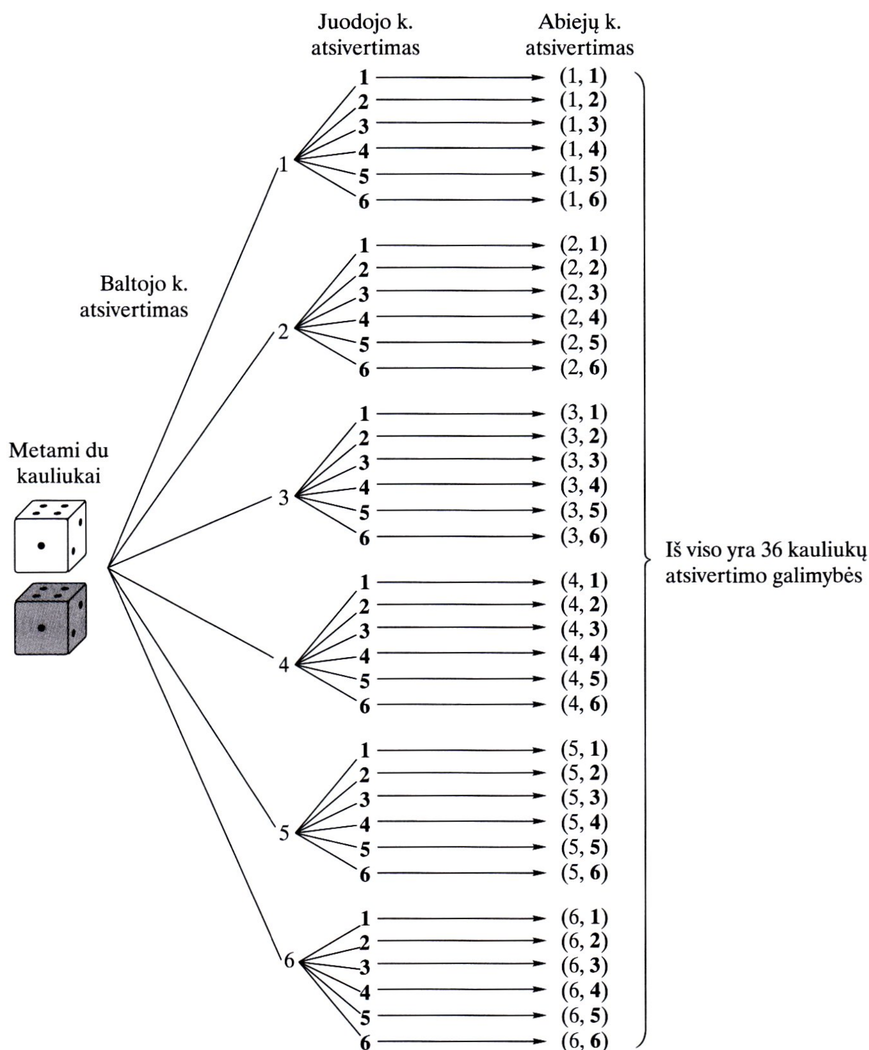
Taikydami *daugybos taisyklę* apskaičiuokime, kiek yra elementariųjų įvykių, kai metame du skirtingų spalvų lošimo kauliukus:

I kauliuko (balto) atsivertimo galimybių skaičius × II kauliuko (juodo) atsivertimo galimybių skaičius = Dviejų kauliukų atsivertimo galimybių skaičius

$$6 \times 6 = 36$$

Galimybių medis

Pavyzdyje aprašyto bandymo elementariųjų įvykių skaičių rasti galima ir braižant *galimybių medį*:



Aišku, kad galimybių medžio braižymas šiuo atveju nėra labai patogus sprendimo būdas. Jį taikome tada, kai rinkinių skaičius nėra didelis.

Pratimai ir uždaviniai

246. Krepšelyje yra 12 obuolių ir 8 kriaušės. Kiek yra galimybių pasirinkti:
a) obuolį? b) kriaušę? c) obuolį arba kriaušę? d) obuolį ir kriaušę?

247. a) Simona vykdama į kelionę pasiima dvejus džinsus — mėlynus ir juodus bei trejus marškinėlius — baltus, raudonus ir geltonus. Kiek skirtingų apsirengimo džinsais ir marškinėliais galimybių ji turi?
b) Spaudos kioske yra 6 rūšių vokų be pašto ženklų ir 3 rūšių vienodos vertės pašto ženklų. Keliais skirtingais būdais galima pasirinkti voką ir pašto ženklą?
c) Jolita kalėdų dovanoms pakuoti nusipirko 3 rūšių popieriaus ir 5 spalvų juostelių. Kiek skirtingų dovanų įpakavimo variantų ji gali sudaryti, jei dovanas vynioja į popierių ir perriša viena iš juostelių?
d) Adomas priešpiečiams nutarė suvalgyti bandelę ir išgerti arbatos arba kavos. Mokyklos bufete yra 5 rūšių bandelių, 2 rūšių kavos ir 3 rūšių arbatos. Kiek skirtingų pasirinkimo galimybių turi Adomas?



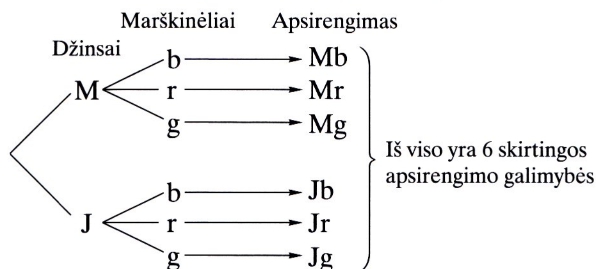
a) *I būdas.* Surašykime visus apsirengimo variantus naudodami sutrumpinimus: mėlyni džinsai — M, juodi — J, balti marškinėliai — b, raudoni — r, geltoni — g. Taigi Simona gali apsirengti taip:

Mb, Mr, Mg, Jb, Jr, Jg.

Gavome 6 skirtingas apsirengimo galimybes.
Surašyti elementariuosius įvykius galima ir pildant lentelę:

	b	r	g
M	Mb	Mr	Mg
J	Jb	Jr	Jg

II būdas. Nubraižykime galimybių medį:



III būdas. Pritaikykime daugybos taisyklę:

2	×	3	=	6
Džinsų pasirinkimo galimybių skaičius		Marškinėlių pasirinkimo galimybių skaičius		Aprangos galimybių skaičius

---

248. Ant kortelių užrašytos raidės:

a) L O A b) J A R Ū c) R T Y S A

Kiek skirtingų raidžių rinkinių (nebūtinai prasmingų) galima sudaryti iš duotųjų raidžių, visas jas panaudojant po vieną kartą?

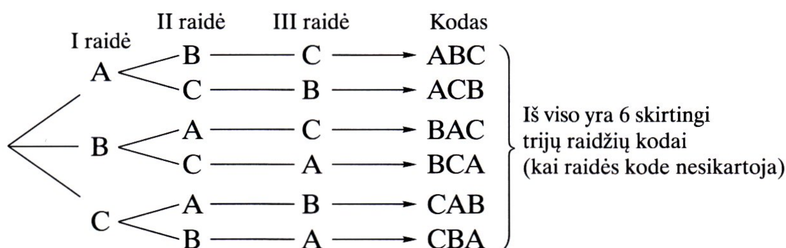


Apskaičiuokime, kiek skirtingų triraidžių kodų galima sudaryti iš raidžių A, B, C, kad raidės kode nesikartotų.

I būdas. Surašykime visus tokius kodus. Akivaizdu, kad kode raidžių išdėstymo tvarka svarbi, todėl galima sudaryti tokius kodus:

ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.

II būdas. Galimybių medis.



III būdas. Daugybos taisyklė.

3	×	2	×	1	=	6
I raidės pasirinkimo galimybių skaičius		II raidės pasirinkimo galimybių skaičius		III raidės pasirinkimo galimybių skaičius		Kodų skaičius

Atkreipkime dėmesį, kad šiame pavyzdyje rinkinį sudarantys *elementai buvo imami iš tos pačios aibės* {A, B, C} *ir yra svarbi jų išdėstymo tvarka rinkinyje.*

249. Kiek skirtingų frazių (nebūtinai prasmingų) galima sudaryti iš žodžių (panaudojant visus žodžius):
a) ledus, aš, mėgstu?
b) Violeta, pasirinko, profilį, humanitarinį?
c) gerai, Jonas, matematikos, sprendžia, uždavinius?

250. Mokiniai vyksta į ekskursiją. Ekskursantai atsitiktinai surašomi priskiriant kiekvienam eilės numerį. Kiek skirtingų sąrašų gali būti sudaryta, jei į ekskursiją vyksta:
a) 15 mokinių? b) 20 mokinių? c) 30 mokinių?

251. Keliais būdais galima sudėti lentynoje vieną šalia kitos:
a) 3 skirtingas knygas? b) 4 skirtingas knygas? c) 15 skirtingų knygų?

252. Keliais skirtingais būdais galima sudėti lentynoje vieną šalia kitos 3 skirtingas knygas, jei jas renkamės iš:
a) 4 skirtingų knygų? b) 6 skirtingų knygų?
c) 8 skirtingų knygų? d) 100 skirtingų knygų?



Kiek skirtingų triraidžių kodų galima sudaryti iš raidžių A, B, C, D, kai raidės kode nesikartoja?

I būdas. Surašykime visus tokius kodus. Iš pradžių imkime bet kurias 3 raides (iš viso tokių trejetų yra keturi) ir visaip jas perstatykime, pvz., pirmiausia imkime raides A, B, C:
ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.
Dabar imkime kitą raidžių trejetą, pvz., A, B, D:
ABD, ADB, BAD, BDA, DAB, DBA.
Analogiškai surašykime trejetus, sudarytus iš raidžių
A, C, D ir B, C, D:
ACD, ADC, CAD, CDA, DAC, DCA,
BCD, BDC, CBD, CDB, DBC, DCB.

II būdas. Pritaikę daugybos taisyklę, kodų skaičių apskaičiuotume greičiau: $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

253. Žilvinas, Justas ir Benas dalyvauja bėgimo varžybų finale. Keliais skirtingais būdais gali pasiskirstyti 1–3 vietos? Surašykite visas galimybes.

254. Plaukimo varžybų finale dalyvauja 4 plaukikės. Keliais skirtingais būdais gali pasiskirstyti 1–3 vietos?

255. Teniso varžybose dalyvauja 12 žaidėjų. Keliais skirtingais būdais gali pasiskirstyti:
a) pirmosios 3 vietos? b) pirmosios 5 vietos?

256. Kiek skirtingų triženklių skaičių galima sudaryti iš skaitmenų:

a) 1, 2, 3? b) 1, 2, 3, 4? c) 1, 2, 3, 4, 5, 6? d) 1, 2, 3, ..., 9?
e) 0, 1, 2, 3? f) 0, 1, 2, 3, 4? g) 0, 1, 2, ..., 9?

Uždavinį išspręskite dviem atvejais — kai skaitmenys skaičiuje nesikartoja ir kai gali kartotis.

257. Parduotuvėje yra 4 rūšių Editos mėgstamos duonos: „Bobučių“, „Senučių“, „Diedukų“ ir „Senių“. Ji nutarė nusipirkti:
a) dviejų skirtingų rūšių duonos; b) trijų skirtingų rūšių duonos.
Surašykite visas Editos pasirinkimo galimybes. Kiek jų yra?



Kiek skirtingų trijų raidžių rinkinių galima sudaryti iš raidžių A, B, C, D, jei raidės rinkinyje nesikartoja ir nesvarbi jų išdėstymo tvarka rinkinyje?

I būdas. Pasinaudokime 252-ojo uždavinio pavyzdžio rezultatais.
ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA,

ABD, ADB, BAD, BDA, DAB, DBA,
ACD, ADC, CAD, CDA, DAC, DCA,
BCD, BDC, CBD, CDB, DBC, DCB.

Aišku, kad iš pirmos eilutės šiuo atveju liks tik vienas rinkinys. Tinka bet kuris — pasirinkime pirmąjį ABC. Analogiškai iš antros eilutės — ABD, iš trečios — ACD, iš ketvirtos — BCD.

Gavome 4 rinkinius: ABC, ABD, ACD, BCD.

Pastebėkime, kad šį kartą rinkinių skaičius, palyginus su 252-ojo uždavinio pavyzdžiu, sumažėjo 6 kartus, t. y. tiek kartų, kiek yra galimybių tris raides sukeisti vietomis.

II būdas. Daugybos taisyklė (su dalyba). Jei raidžių tvarka rinkinyje būtų svarbi, tai gautume $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ rinkinius.

Kadangi sąlygoje pasakyta, jog raidžių išdėstymo tvarka rinkinyje nesvarbi, o tris raides vietomis sukeisti galima $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ būdais, tai iš viso turėsime $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4$ rinkinius.

III būdas. Iš 4 raidžių paimti 3 raides, tai tas pats, kas nepaimti kurios nors raidės. O tai padaryti yra 4 galimybės.

Atkreipiame dėmesį, kad šiame pavyzdyje *rinkinį sudarantys elementai buvo imami iš tos pačios aibės* $\{A, B, C, D\}$, *bet nesvarbi jų išdėstymo tvarka rinkinyje.*

Pastaba. Ieškant rinkinių skaičiaus ir taikant daugybos taisyklę, pravartu įsidėmėti, kad:

1. Jei rinkinį sudarantys elementai imami iš: a) skirtingų aibių; b) iš tos pačios aibės, bet svarbi jų išdėstymo tvarka rinkinyje, tai pakanka tik daugybos taisyklės.

2. Jei rinkinį sudarantys elementai imami iš tos pačios aibės, bet nesvarbi jų išdėstymo tvarka rinkinyje, taikome daugybos taisyklę su dalyba — dalijame iš rinkinį sudarančių elementų sutvarkymų skaičiaus. Jei rinkinį sudaro 2 elementai, dalijame iš $2 \cdot 1$, jei 3 — iš $3 \cdot 2 \cdot 1$, jei 4 — iš $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ ir t. t.

---

258. Iš 15 kompiuterinių žaidimų plokštelių Petras nori pasirinkti:
a) dvi; b) tris; c) keturias; d) penkias; e) dešimt skirtingų plokštelių.
Kiek pasirinkimo galimybių jis turi?

259. Dėžėje yra 12 skirtingų spalvų rutulių. Kiek yra galimybių atsitiktinai ištraukti:
a) vieną? b) du? c) tris? d) keturis? e) aštuonis? f) dvylika rutulių?

260. Šaškių turnyre dalyvavę žaidėjai sužaidė vienas su kitu po vieną partiją. Kiek partijų sužaista iš viso, jei turnyre dalyvavo:
a) 6? b) 8? c) 10? d) 15 žaidėjų?

261. 20 dvyliktokų paspaudė vienas kitam rankas ir apsikeitė vienas su kitu nuotraukomis.
a) Kiek buvo rankų paspaudimų (kai du pasisveikina, sakysime, kad tai — vienas paspaudimas)?
b) Kiek nuotraukų išdalyta?

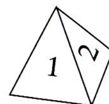
262. Sociologinei apklausai iš 12 merginų ir 14 vaikinų atsitiktinai turi būti atrinkta keletas moksleivių. Kiek skirtingų variantų būtų, jei renkama:
a) 2 merginos? b) 2 vaikinai? c) 3 merginos? d) 4 vaikinai?
e) 1 mergina ir 1 vaikinas? f) 2 merginos ir 2 vaikinai?
g) 3 merginos ir 4 vaikinai? h) 1 mergina ir 4 vaikinai?

263. Ant kortelių užrašytos raidės [A] [M] [E] [T] [O] [N].

Kortelės užverčiamos, sumaišomos ir atsitiktinai sudėjus į eilę, atverčiamos.
a) Kiek skirtingų 6 raidžių rinkinių iš jų galima sudaryti?
b) Kiek yra tokių rinkinių, kurių pirmoji raidė M?
c) Kiek yra tokių rinkinių, kurių pirmoji raidė M, o paskutinė A?
d) Kam lygi tikimybė, kad atsitiktinai iš sudarytų rinkinių parinktas raidžių šešetas sudarys žodį MONETA?
e) Kam lygi tikimybė, kad atsitiktinai iš sudarytų rinkinių parinktas raidžių šešetas prasidės raide M?
f) Kam lygi tikimybė, kad atsitiktinai iš sudarytų rinkinių parinktas raidžių šešetas prasidės raide M, o pasibaigs raide A?

264. Iš 20 loterijos bilietų 5 yra laimingi. Atsitiktinai traukiami 2 bilietai.
a) Kiek yra galimybių ištraukti 2 bilietus?
b) Kiek yra galimybių ištraukti 2 laimingus bilietus?
c) Kiek yra galimybių ištraukti 2 nelaimingus bilietus?
d) Kiek yra galimybių ištraukti 1 laimingą ir 1 nelaimingą bilietą?
e) Apskaičiuokite tikimybes įvykių:
A — abu ištraukti bilietai yra laimingi;
B — abu ištraukti bilietai yra nelaimingi;
C — vienas ištrauktas bilietas yra laimingas, o kitas — nelaimingas.

265. Ketursienis lošimo kauliukas, ant kurio sienų užrašyti skaitmenys 1, 2, 3, 4, metamas du kartus. Užrašomi pirmą ir antrą kartą iškritę skaitmenys (užrašomas skaitmuo, esantis apatinėje sienoje. Kairėje rašome pirmojo metimo skaitmenį, dešinėje — antrojo metimo skaitmenį). Taip gaunamas dviženklis skaičius.
a) Kiek skirtingų dviženklių skaičių galima sudaryti tokiu būdu? Surašykite juos.
b) Kiek iš jų yra lyginių?
c) Kiek iš jų yra dalių iš 3?
d) Apskaičiuokite tikimybes įvykių:
A — atsitiktinai iš visų sudarytų skaičių parinktas skaičius yra lyginis;
B — atsitiktinai iš visų sudarytų skaičių parinktas skaičius yra dalus iš 3.



266. Dėžutėje yra 6 raudoni ir 4 balti kubeliai. Atsitiktinai ištraukiami 2 kubeliai. Apskaičiuokite tikimybes įvykių:
A — abu ištraukti kubeliai yra raudoni;
B — abu ištraukti kubeliai yra balti;
C — vienas ištrauktas kubelis yra raudonas, o kitas — baltas.

13.4. Nepriklausomi įvykiai

Kokie įvykiai vadinami nepriklausomais?

Aptarkime du bandymus.

1 BANDYMAS. Iš dėžės, kurioje yra 2 rusvi ir 3 balti rutuliai, nežiūrint traukiamas vienas rutulys. Pasižymėjus, kokios jis yra spalvos, rutulys *grąžinamas* į dėžę. Tada antrą kartą nežiūrint traukiamas rutulys.
Pažymėkime įvykius:

A — pirmas ištrauktas rutulys yra baltas,
B — antras ištrauktas rutulys yra rusvas.

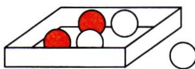
Akivaizdu tai, jog įvykis A *nedaro įtakos* įvykio B tikimybei, t. y. $\mathbf{P}(B) = \frac{2}{5}$ nepriklauso nuo to, kad įvyko įvykis A, t. y. koks buvo pirmasis ištrauktas rutulys (nes jis buvo grąžintas į dėžę).

2 BANDYMAS. Sakykime, kad iš tos pačios dėžės paeiliui traukiami du rutuliai, bet pirmasis ištrauktas rutulys *negrąžinamas* į dėžę.
Pažymėkime įvykius:

C — pirmas ištrauktas rutulys yra baltas,
D — antras ištrauktas rutulys yra rusvas.

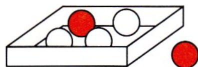
Nesunku suprasti, kad šiuo atveju įvykio D tikimybė *priklauso* nuo to, ar įvyko įvykis C.
Jei įvykis C įvyko, t. y. jei pirmas ištraukas rutulys buvo baltas, tai

$$\mathbf{P}(D,\ \text{jei įvyko } C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$



Jei įvykis C neįvyko, t. y. jei pirmas ištrauktas rutulys buvo rusvas, tai

$$\mathbf{P}(D,\ \text{jei neįvyko } C) = \frac{1}{4}.$$



Tikimybė, kad antras rutulys bus rusvas priklauso nuo to, kokį rutulį ištraukėme pirmuoju traukimu.

Sakoma, kad du įvykiai yra ***nepriklausomi****, kai vieno jų įvykimas ar neįvykimas neturi įtakos kito įvykio tikimybei.*

Mūsų nagrinėtuose bandymuose įvykiai A ir B yra nepriklausomi, o įvykiai C ir D — priklausomi.

Kaip apskaičiuoti nepriklausomų įvykių sankirtos tikimybę?

PAVYZDYS. Metama moneta ir lošimo kauliukas ir stebima, kuo jie atvirto. Pažymėkime įvykius:

A — moneta atvirto herbu,
B — lošimo kauliukas atvirto didesniu už 4 skaičiumi.

Apskaičiuokime tikimybę įvykio:

A ir B — moneta atvirto herbu, o lošimo kauliukas didesniu už 4 skaičiumi.

Sakoma, kad ieškome įvykių A ir B sankirtos tikimybės $\mathbf{P}(A \text{ ir } B)$.
Pastebėkime, kad įvykiai A ir B yra nepriklausomi.
Sudarykime elementariųjų įvykių aibę ir išskirkime įvykiui „A ir B“ palankius elementariuosius įvykius:

$$\{h1, h2, h3, h4, \underline{h5}, \underline{h6}, s1, s2, s3, s4, s5, s6\}.$$

Kadangi iš viso yra 12 elementariųjų įvykių, o įvykiui „A ir B“ palankūs 2 iš jų, tai $\mathbf{P}(A \text{ ir } B) = \frac{2}{12}$.
Bet šį rezultatą galėjome gauti ir kitu būdu. Iš tikrųjų,

$$\mathbf{P}(A) = \frac{1}{2} \quad \{\underline{h}, s\}, \quad \mathbf{P}(B) = \frac{2}{6} \quad \{1, 2, 3, 4, \underline{5}, \underline{6}\}; \quad \mathbf{P}(A)\cdot\mathbf{P}(B) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{6} = \frac{2}{12}.$$

Gavome, kad

$$\mathbf{P}(A \text{ ir } B) = \mathbf{P}(A)\cdot\mathbf{P}(B).$$

Taigi įvykio „A ir B“ tikimybę galima apskaičiuoti sudauginant nepriklausomų įvykių A ir B tikimybes.

Nepriklausomų įvykių A ir B sankirtos „A ir B“ tikimybė lygi tų įvykių tikimybių sandaugai: $\mathbf{P}(A \text{ ir } B) = \mathbf{P}(A)\cdot\mathbf{P}(B)$.

UŽDAVINYS. Dviejose dėžėse yra vienodo dydžio, bet skirtingų spalvų rutuliai. Pirmoje dėžėje yra 4 žali ir 2 balti, o antroje — 3 žali ir 5 balti rutuliai. Iš abiejų dėžių atsitiktinai traukiama po vieną rutulį. Kokia tikimybė, kad abu rutuliai bus žali?

Sprendimas. Pažymėkime įvykius:

A — iš pirmos dėžės ištrauktas žalias rutulys,
B — iš antros dėžės ištrauktas žalias rutulys,
A ir B — abu ištraukti rutuliai yra žali.

Aišku, kad

$$\mathbf{P}(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \quad \mathbf{P}(B) = \frac{3}{8}.$$

Kadangi iš antros dėžės ištraukto rutulio spalva nepriklauso nuo to, kokios spalvos rutulys ištrauktas iš pirmos dėžės, tai įvykiai A ir B nepriklausomi, todėl

$$\mathbf{P}(A \text{ ir } B) = \mathbf{P}(A)\cdot\mathbf{P}(B) = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

Atsakymas. $\frac{1}{4}$.

Pratimai ir uždaviniai

267. Ar įvykiai A ir B yra nepriklausomi? Pagrįskite savo nuomonę.

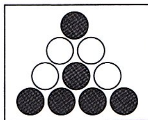
Įvykis A	Įvykis B
Pirmadienį pavėlavau į autobusą.	Antradienį pavėlavau į autobusą.
Šiandien pavėlavau į autobusą.	Šiandien pavėlavau į mokyklą.
Metant kauliuką pirmą kartą, atvirto 6 akutės.	Antrą kartą metant kauliuką, atvirto 6 akutės.
Lošimo kauliukas pirmą kartą atvirto lyginiu akučių skaičiumi.	Lošimo kauliukas antrą kartą atvirto 4 akutėmis.
Moneta atvirto herbu.	Lošimo kauliukas atvirto 3 akutėmis.
Šeimoje vyriausias vaikas yra berniukas.	Šeimoje jauniausias vaikas yra berniukas.
Iš dėžės, kurioje yra 1 juodas ir 2 balti rutuliai, pirmu traukimu ištrauktas baltas rutulys ir negrąžintas į dėžę.	Iš tos pačios dėžės antruoju traukimu ištrauktas baltas rutulys.
Iš 24 kortų kaladės pirmu traukimu ištrauktas tūzas.	Iš likusių 23 kortų ištrauktas tūzas.

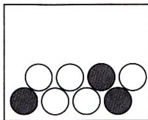
268. Metama moneta ir lošimo kauliukas ir stebima, kaip jie atvirto. Apskaičiuokite tikimybes įvykių:
A — moneta atsivertė herbu, o lošimo kauliukas šešiomis akutėmis;
B — moneta atsivertė herbu, o lošimo kauliukas nelyginiu akučių skaičiumi;
C — moneta atsivertė skaičiumi, o lošimo kauliukas akučių skaičiumi, daliu iš 3.

269. Moneta metama 2 kartus ir stebima, kuo ji atvirto. Apskaičiuokite tikimybes įvykių:
A — pirmą kartą atvirto herbas, o antrą — skaičius;
B — pirmą kartą atvirto skaičius, o antrą — herbas;
C — abu kartus atvirto skaičius;
D — abu kartus atvirto herbas.

270. Lošimo kauliukas metamas du kartus ir stebimas atvirtusių akučių skaičius. Apskaičiuokite tikimybes įvykių:
A — pirmą kartą iškrito 4 akutės, o antrą kartą iškrito mažiau nei 4 akutės;
B — pirmą kartą iškrito lyginis akučių skaičius, o antrą kartą iškrito ne mažiau kaip 3 akutės;
C — abu kartus atvirto lyginis akučių skaičius;
D — pirmą kartą atvirto nelyginis, o antrą — pirminis akučių skaičius.

271. Dviejose dėžėse yra pilki ir balti rutuliai. Pirmoje — 10 rutulių, antroje — 8.


1 dėžė


2 dėžė

Iš abiejų dėžių atsitiktinai traukiama po vieną rutulį. Apskaičiuokite tikimybes įvykių:
A — abu išimti rutuliai yra balti;
B — abu išimti rutuliai yra pilki;
C — iš pirmos dėžės išimtas baltas, o iš antros — pilkas rutulys;
D — iš pirmos dėžės išimtas pilkas, o iš antros — baltas rutulys.

272. Dviejose dėžėse yra vienodo dydžio, bet skirtingų spalvų rutuliai. Pirmoje dėžėje yra 8 raudoni ir 6 balti rutuliai, o antroje — 6 raudoni, 3 balti ir 3 juodi rutuliai. Iš abiejų dėžių atsitiktinai traukiama po vieną rutulį. Apskaičiuokite tikimybes įvykių:
A — abu ištraukti rutuliai yra raudoni;
B — abu ištraukti rutuliai yra balti;
C — iš pirmos dėžės ištrauktas raudonas rutulys, o iš antros — baltas;
D — iš pirmos dėžės ištrauktas baltas rutulys, o iš antros — juodas;
E — iš pirmos dėžės ištrauktas raudonas rutulys, o iš antros — ne raudonas.

273. Dainius nusipirko po vieną dviejų loterijų bilietą. Tikimybė, kad pirmosios loterijos bilietas laimingas, lygi 0,03, o kad laimingas antrosios — 0,05. Kokia tikimybė, kad:
a) abu loterijų bilietai bus laimingi? b) abu nelaimingi?



Akivaizdu, kad įvykiai *A* — „pirmosios loterijos bilietas yra laimingas“ ir *B* — „antrosios loterijos bilietas yra laimingas“ yra nepriklausomi.

---

274. Tikimybė, kad šaulys vienu šūviu pataikys į taikinį, lygi 0,7. Šaulys šauna du kartus. Laikykime, kad šūviai nepriklausomi. Apskaičiuokite tikimybes įvykių:
A — šaulys pataiko į taikinį abu kartus;
B — šaulys nepataiko į taikinį abu kartus;
C — pirmu šūviu šaulys pataiko, o antru nepataiko į taikinį;
D — pirmu šūviu šaulys nepataiko, o antru pataiko į taikinį.

275. Jonaičių dukra Asta ir sūnus Albinas studijuoja skirtinguose miestuose. Savaitgaliais, nesitarę, kartais jie aplanko tėvus. Tikimybė, kad Asta savaitgalį aplankys tėvus, lygi 0,8, o kad Albinas — 0,6. Apskaičiuokite tikimybę, kad atsitiktinai pasirinktą savaitgalį:
a) abu vaikai aplanko tėvus; b) nei vienas iš vaikų neaplankys tėvų.

276. Šviestuve įsuktos dvi skirtingos lemputės. Tikimybė, kad per mėnesį perdegs pirmoji lemputė, lygi 0,14, o kad perdegs antroji — 0,2. Kokia tikimybė, kad per mėnesį:
a) perdegs abi lemputės?
b) neperdegs nė viena lemputė?

277. Iš 50 istorijos bilietų studentas išmoko 45, o iš 60 geografijos bilietų — 40. Laikydamas kiekvieno dalyko egzaminą studentas traukia po vieną bilietą. Kam lygi tikimybė, kad studentas:
a) išlaikys abu egzaminus?
b) neišlaikys nė vieno egzamino?

278. Trys šauliai nepriklausomai vienas nuo kito šauna į taikinį. Pirmojo šaulio pataikymo tikimybė lygi 0,9, antrojo — 0,8, trečiojo — 0,75. Kokia tikimybė, kad:
a) visi trys šauliai pataikys į taikinį?
b) visi trys šauliai nepataikys į taikinį?
c) pirmasis šaulys pataikys, o antrasis ir trečiasis nepataikys?
d) pirmasis ir antrasis šauliai pataikys, o trečiasis nepataikys?

279. Gaminant detalę atliekamos 3 nepriklausomos operacijos. Tikimybė tinkamai atlikti kiekvieną operaciją lygi 0,65. Apskaičiuokite tikimybę pagaminti gerą detalę.

280. Benas meta kauliuką. Jis turi išmesti 6 akutes, kad galėtų pradėti žaidimą. Apskaičiuokite tikimybę, kad jam pasisekė pradėti žaidimą po:
a) pirmo; b) antro; c) trečio metimo.

281. Pasukęs laimės ratą vieną kartą berniukas ką nors laimi su tikimybe, lygia $\frac{1}{20}$. Kam lygi tikimybė, kad berniukas laimės visus kartus, kai ratą suks:
a) 2 kartus? b) 3 kartus? c) 4 kartus?

282. Tikimybė laimėti loterijoje perkant 1 bilietą, lygi 0,15. Kam lygi tikimybė, kad perkant tris bilietus:
a) laimingi bus visi 3 bilietai?
b) visi 3 bilietai bus nelaimingi?

13.5. Nesutaikomi įvykiai

Kokie įvykiai vadinami nesutaikomais?

Panagrinėkime šiuos su kauliuko metimu susijusius įvykius:

a) A — atvirto nelyginis akučių skaičius; B — atvirto šešios akutės;
b) C — atvirto lyginis akučių skaičius; D — atvirto dvi akutės.

Aišku, kad atliekant bandymą įvykiai A ir B negali įvykti kartu, nes negali tuo pačiu metu atvirsti nelyginis akučių skaičius ir šešios akutės (6 — lyginis skaičius). Tuo tarpu įvykiai C ir D atliekant bandymą gali įvykti kartu, nes atvirtus dviem akutėms, įvyksta ir įvykis C, ir įvykis D, nes 2 — lyginis skaičius. Kitaip galima pasakyti, kad nėra nei vienos baigties, kuri būtų palanki abiem įvykiams A ir B, ir yra viena baigtis, palanki abiem įvykiams C ir D.

*Du įvykiai vadinami **nesutaikomais**, jeigu atliekant bandymą jie negali įvykti kartu, arba, kitaip tariant, nėra nei vienos baigties, kuri būtų palanki abiem įvykiams.*

Mūsų nagrinėtame pavyzdyje įvykiai A ir B yra nesutaikomi, o įvykiai C ir D — sutaikomi.

Kaip apskaičiuoti nesutaikomų įvykių sąjungos tikimybę?

PAVYZDYS. Ant kortelių po vieną užrašyti skaičiai nuo 1 iki 20. Atsitiktinai traukiama viena kortelė. Pažymėkime įvykius:

A — ant kortelės užrašytas skaičius dalijasi iš 4,
B — ant kortelės užrašytas skaičius dalijasi iš 7.

Apskaičiuokime tikimybę įvykio:

A arba B — ant kortelės užrašytas skaičius yra 4 kartotinis arba 7 kartotinis.

Sakoma, kad ieškome įvykių A ir B sąjungos tikimybės $\mathbf{P}(A \text{ arba } B)$.
Įvykiai A ir B yra nesutaikomi — tarp skaičių nuo 1 iki 20 nėra tokių, kurie dalytųsi ir iš 4, ir iš 7.
Sudarykime elementariųjų įvykių aibę ir pažymėkime įvykius, kurie palankūs arba įvykiui A, arba įvykiui B:

$$\{1, 2, 3, \underline{4}, 5, 6, \underline{7}, \underline{8}, 9, 10, 11, \underline{12}, 13, \underline{14}, 15, \underline{16}, 17, 18, 19, \underline{20}\}.$$

Kadangi iš viso yra 20 elementariųjų įvykių, o įvykiui „A arba B“ palankūs 7 iš jų, tai

$$\mathbf{P}(A \text{ arba } B) = \frac{7}{20}.$$

Bet šį rezultatą galėjome gauti ir kitu būdu. Pastebėkime, kad:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{5}{20} \text{ (palankūs įvykiai 4, 8, 12, 16, 20),}$$

$$\mathbf{P}(B) = \frac{2}{20} \text{ (palankūs įvykiai 7, 14);}$$

$$\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) = \frac{5}{20} + \frac{2}{20} = \frac{7}{20}.$$

Gavome, kad

$$\mathbf{P}(A \text{ arba } B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B).$$

Taigi įvykio „A arba B“ tikimybę galėjome apskaičiuoti sudėję nesutaikomų įvykių A ir B tikimybes.

Nesutaikomų įvykių A ir B sąjungos „A arba B“ tikimybė lygi tų įvykių tikimybių sumai: $\mathbf{P}(A \text{ arba } B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$.

UŽDAVINYS. Dėžėje yra balti, raudoni ir mėlyni rutuliai. Nežiūrint traukiamas vienas rutulys. Tikimybė ištraukti baltą rutulį lygi 0,35, raudoną — 0,25, mėlyną — 0,4. Apskaičiuokime įvykio „ištrauktas rutulys yra raudonas arba mėlynas“ tikimybę.
Sprendimas. Pažymėkime įvykius:

A — ištrauktas rutulys yra raudonas;
B — ištrauktas rutulys yra mėlynas;
A arba B — ištrauktas rutulys yra raudonas arba mėlynas.

Kadangi A ir B negali įvykti kartu, t. y. rutulys negali būti raudonas ir mėlynas tuo pačiu metu, tai A ir B — nesutaikomi įvykiai, todėl

$$\mathbf{P}(A \text{ arba } B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) = 0{,}25 + 0{,}4 = 0{,}65.$$

Atsakymas. 0,65.

Pratimai ir uždaviniai

283. Ar įvykiai A ir B yra nesutaikomi? Pagrįskite savo nuomonę.

a) Moneta metama vieną kartą,
A — iškrito herbas, B — iškrito skaičius.

b) Lošimo kauliukas metamas vieną kartą,
A — atvirto 2 akutės, B — atvirto 4 akutės.

c) Lošimo kauliukas metamas vieną kartą,
A — atvirto lyginis akučių skaičius, B — atvirto 2 arba 4 akutės.

d) Iš 24 kortų kaladės ištraukiama viena korta,
A — ištrauktas tūzas, B — ištrauktas kryžius.

e) Iš 24 kortų kaladės ištraukiama viena korta,
A — ištrauktas karalius, B — ištrauktas būgnų karalius.

f) Metamos dvi monetos,
A — abi atsivertė herbu, B — viena atsivertė herbu, o kita skaičiumi.

g) Metamos dvi monetos,
A — abi atsivertė skaičiais, B — bent viena atsivertė skaičiumi.

284. Įvykiai A ir B yra nesutaikomi. Apskaičiuokite tikimybę įvykio „A arba B“, kai:

a) $\mathbf{P}(A) = 0{,}6$, $\mathbf{P}(B) = 0{,}3$;
b) $\mathbf{P}(A) = 0{,}8$, $\mathbf{P}(B) = \frac{1}{15}$;
c) $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{14}$, $\mathbf{P}(B) = \frac{3}{7}$;
d) $\mathbf{P}(A) = 0{,}125$, $\mathbf{P}(B) = \frac{7}{8}$.

285. Dėžėje yra balti, raudoni, žali ir mėlyni rutuliai. Tikimybė ištraukti baltą rutulį lygi 0,25, raudoną — 0,1, žalią — 0,15, mėlyną — 0,3. Atsitiktinai traukiamas vienas rutulys ir stebima jo spalva. Apskaičiuokite tikimybę, kad ištrauktas rutulys yra:

a) baltas;
b) žalias;
c) mėlynas;
d) baltas arba žalias;
e) baltas arba mėlynas;
f) žalias arba mėlynas;
g) ne raudonas;
h) ne raudonas ir ne žalias.

286. Dėžėje yra 30 kubelių. Tarp jų — 6 mėlyni ir 5 raudoni. Atsitiktinai traukiame vieną kubelį. Pažymėkime įvykius: A — ištrauktas mėlynas kubelis, B — ištrauktas raudonas kubelis. Apskaičiuokite $\mathbf{P}(A)$, $\mathbf{P}(B)$, $\mathbf{P}(A \text{ arba } B)$.

287. Iš 24 kortų kaladės atsitiktinai traukiama viena korta. Apskaičiuokite tikimybes įvykių:

A — ištrauktas tūzas; B — ištrauktas karalius;
C — ištraukta dama; D — ištrauktas kryžius;
E — ištrauktas būgnas; F — ištrauktas ne tūzas;
G — ištrauktas tūzas arba karalius; H — ištrauktas kryžius arba būgnas;
I — ištrauktas arba tūzas, arba dama, arba karalius.

288. Iš 300 loterijos bilietų 5 laimi po 50 litų, 20 — po 10 litų, 30 — po 5 litus, 40 — po 2 litus, kiti nelaimi nieko. Simas pirko vieną bilietą. Apskaičiuokite tikimybę, kad Simas:

a) laimės 50 litų;
b) laimės 10 litų;
c) laimės 5 litus;
d) laimės 2 litus;
e) nieko nelaimės;
f) laimės daugiau nei 5 litus;
g) laimės ne mažiau kaip 5 litus;
h) laimės ne daugiau kaip 10 litų;
i) laimės kokią nors pinigų sumą.

289. Metami du lošimo kauliukai ir stebima iškritusių akučių suma. Apskaičiuokite tikimybes įvykių:
A — iškritusių akučių suma lygi 5,
B — iškritusių akučių suma lygi 6,
C — iškritusių akučių suma lygi 5 arba 6.

290. Metami du lošimo kauliukai ir stebima iškritusių akučių sandauga. Apskaičiuokite tikimybes įvykių:
A — sandauga lygi 12;
B — sandauga lygi 36;
C — sandauga yra dalus iš 5 skaičius;
D — sandauga lygi 12 arba 36;
E — sandauga lygi 36 arba yra dalus iš 5 skaičius;
F — sandauga lygi 12 arba yra dalus iš 5 skaičius.

291. Ant 10 kortelių surašyti skaičiai nuo 1 iki 10. Atsitiktinai traukiama viena kortelė. Apskaičiuokite tikimybes įvykių:
A — ant kortelės užrašytas skaičius yra 3 kartotinis;
B — ant kortelės užrašytas skaičius yra 5 kartotinis;
C — ant kortelės užrašytas skaičius, kuris yra 3 kartotinis arba 5 kartotinis.

292. Ant 15 kortelių surašyti skaičiai nuo 1 iki 15. Atsitiktinai viena po kitos negrąžinant ištraukiamos dvi kortelės. Apskaičiuokite tikimybes įvykių:
A — ištrauktų skaičių suma lygi 10;
B — ištrauktų skaičų suma lygi 20;
C — ištrauktų skaičių suma mažesnė už 15;
D — ištrauktų skaičių suma ne didesnė už 15.
Suformuluokite įvykį „A arba B“ ir apskaičiuokite jo tikimybę.

293. Egzamino 64 darbai užkoduoti skaičiais nuo 1 iki 64. Atsitiktinai paimtas vienas darbas. Apskaičiuokite tikimybes įvykių:
A — darbo kodas yra dalus iš 5 skaičius;
B — darbo kodas yra dalus iš 13 skaičius;
C — darbo kodas yra dalus iš 5 arba dalus iš 13 skaičius.

294. Knygoje yra 200 puslapių. Atsitiktinai atverčiame knygos puslapį. Apskaičiuokite tikimybes įvykių:
A — atversto puslapio numeris yra 13 kartotinis;
B — atversto puslapio numeris yra 20 kartotinis;
C — atversto puslapio numeris yra 13 kartotinis arba 20 kartotinis.

295. Petras užrašė natūralųjį dviženklį skaičių. Kokia tikimybė, kad tas skaičius bus 11 kartotinis arba 17 kartotinis?

296. Saldumynus mėgstanti Saulė nusipirko šokoladinių saldainių dėžutę, kurioje buvo 3 juodojo, 5 baltojo ir 6 pieniško šokolado saldainiai. Iš dėžutės ji paėmė pirmus pasitaikiusius 3 saldainius. Apskaičiuokite tikimybę įvykio:
a) *A* — visi paimti saldainiai yra juodojo šokolado;
b) *B* — visi paimti saldainiai yra baltojo šokolado;
c) *C* — visi paimti saldainiai yra pieniško šokolado;
d) *D* — du saldainiai yra juodojo ir vienas baltojo šokolado;
e) *E* — du saldainiai yra pieniško ir vienas baltojo šokolado.

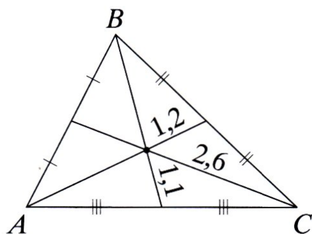
297. Dėžėje yra 21 raudonas ir 15 baltų rutulių. Vienas rutulys išimamas ir įsidėmėjus jo spalvą dedamas atgal į dėžę. Paskui iš dėžės vėl išimamas rutulys. Kokia tikimybė, kad:
a) abu rutuliai bus balti?
b) abu rutuliai bus raudoni?
c) vienas rutulys bus raudonas, o kitas — baltas?

298. Trikotažo gamybos ceche moteris aptarnauja 4 mezgimo mašinas. 20% darbo laiko ji praleidžia prie pirmosios, 30% — prie antrosios, 15% — prie trečiosios ir 35% — prie ketvirtosios mezgimo mašinos. Kokia tikimybė, kad atsitiktiniu metu į cechą užėjusi meistrė ras moterį dirbančią prie:
a) pirmosios arba trečiosios?
b) antrosios arba ketvirtosios?
c) arba pirmosios, arba antrosios, arba ketvirtosios?
d) prie bet kurios iš mezgimo mašinų?

299. Draudimo kompanija apskaičiavo, kad vidutiniškai per metus iš 1000 klientų dešimčiai išmoka visą draudimo sumą, 20 — dalinę sumą, kitiems — nieko neišmoka. Apskaičiuokite tikimybę, kad atsitiktinai parinktam draudimo kompanijos klientui:
a) buvo išmokėta visa draudimo suma;
b) buvo išmokėta dalinė draudimo suma;
c) buvo išmokėta visa arba dalinė draudimo suma;
d) nebuvo išmokėta nieko.

13.6. Geometrijos uždaviniai

300. Trikampyje ABC nubrėžtos jo pusiaukraštinės. Raskite jų ilgius.



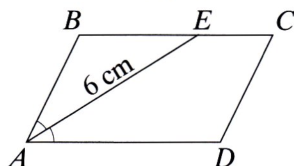


Trikampio pusiaukraštinės susikerta viename taške. Tas taškas pusiaukraštines dalija į atkarpas, kurių ilgių santykis, skaičiuojant nuo trikampio viršūnių, yra 2 : 1.

301. Rombo kraštinė su įstrižainėmis sudaro kampus, kurių dydžių santykis lygus 7 : 11. Raskite rombo kampų dydžius.

302. Lygiašonės trapecijos kampų, esančių prie šoninės kraštinės, dydžiai sutinka kaip 2 : 2,5. Apskaičiuokite trapecijos kampų dydžius.

303. $ABCD$ — lygiagratainis, AE — kampo A pusiaukampinė.



Apskaičiuokite lygiagretainio perimetrą, jei $\triangle ABE$ perimetras lygus 14 dm, o $BE : EC = 3 : 1$.

304. Trikampio kampų dydžių santykis yra 1 : 2 : 3.

1) Apskaičiuokite trikampio kampų dydžius.
2) Apskaičiuokite trikampio plotą, jei jo ilgiausioji kraštinė lygi 12 cm.



Prieš didžiausiąjį trikampio kampą yra ilgiausioji trikampio kraštinė.

13.7. Pasitikrinkime

305. Klasėje yra 18 merginų ir 12 vaikinų. Traukiami burtai, kam atiteks vienas bilietas į kiną. Kokia tikimybė, kad bilietas atiteks:
a) merginai? b) vaikinui?

306. Dėžutėje yra 4 kortelės, ant kurių užrašyti skaičiai 2, 5, 6, 8. Nežiūrint viena po kitos traukiamos dvi kortelės. Antra ištraukta kortelė dedama pirmosios kortelės dešinėje. Tokiu būdu gaunamas dviženklis skaičius. Surašykite visus taip galimus gauti skaičius. Apskaičiuokite tikimybes įvykių:
A — gautas skaičius yra lyginis;
B — gautas skaičius yra dalus iš 5;
C — gautas skaičius yra 3 kartotinis.

307. Iš vienodai varžyboms pasirengusių 5 puolėjų ir 4 gynėjų treneriui į komandą reikia pasirinkti:
a) 1 puolėją ir 1 gynėją; b) 2 gynėjus; c) 3 puolėjus.
Kiek jis turi skirtingų galimybių?

308. Įvykiai C ir D yra nepriklausomi. Apskaičiuokite $\mathbf{P}(C \text{ ir } D)$, jei $\mathbf{P}(C) = \frac{2}{9}$, $\mathbf{P}(D) = \frac{3}{4}$.

309. Lošimo kauliukas metamas 2 kartus ir stebimas atvirtusių akučių skaičius. Apskaičiuokite tikimybes įvykių:
A — pirmą kartą atvirto 1 akutė, o antrą kartą 6 akutės;
B — pirmą kartą atvirto lyginis, o antrą kartą nelyginis akučių skaičius.

310. Įvykiai A ir B yra nesutaikomi. Apskaičiuokite $\mathbf{P}(A \text{ arba } B)$, jei $\mathbf{P}(A) = 0{,}62$, $\mathbf{P}(B) = 0{,}3$.

311. Dėžėje yra raudoni, balti ir mėlyni rutuliai. Tikimybė iš dėžės ištraukti raudoną rutulį lygi $\frac{1}{4}$, baltą — $\frac{3}{20}$, mėlyną — $\frac{3}{5}$. Apskaičiuokite tikimybę, kad atsitiktinai ištrauktas vienas rutulys yra:
a) raudonas arba baltas; b) raudonas arba mėlynas; c) ne baltas.

312. Iš lygiagretainio bukojo kampo viršūnės nubrėžta aukštinė. Aukštinė šį kampą dalija santykiu 2 : 3. Apskaičiuokite lygiagretainio smailiojo kampo dydį.

313. Stačiakampio žemės sklypo ilgio ir pločio santykis yra 5 : 3. Sklypo ilgis 400 m didesnis už plotį.
a) Koks sklypo perimetras?
b) Koks sklypo plotas?

Žaidimas

Televizijos žaidime „Stebuklinga dėžutė“ vedantysis pasiūlė žaidėjui rinktis vieną iš trijų dėžučių. (Vienoje dėžutėje yra prizas, o kitos dvi — tuščios.)
Žaidėjas pasirinko pirmąją dėžutę.



Vedantysis atidengė vieną iš likusių dviejų dėžučių (antrąją), kuri pasirodė tuščia ir pasiūlė žaidėjui arba pakeisti savo nuomonę ir pasirinkti trečiąją dėžutę, arba nekeisti pradinio pasirinkimo.



Kaip turi elgtis žaidėjas, kad tikimybė laimėti prizą būtų didžiausia?
Galimi trys atsakymų variantai:

A Nėra jokio skirtumo, kurią dėžutę pasirinkti
B Geriau nuomonės nekeisti ir likti prie pirmosios pasirinktos dėžutės
C Pasirinkti trečiąją dėžutę

14 STATISTIKA

14.1. Duomenų rinkimas

Populiacija ir imtis

- Visuotinio Lietuvos gyventojų surašymo duomenimis, 2001 04 06 Lietuvos Respublikoje gyveno 3 483 972 nuolatiniai gyventojai, iš jų mieste – 2 332 098, kaime – 1 151 874.
- Vartojimo prekių ir paslaugų kainos 2003 m. vasario mėn., palyginus su sausio mėn., sumažėjo 0,3%.
- 2003 m. sausio mėn. pramonės produkcijos parduota 5,5% mažiau, palyginus su 2002 m. sausio mėn.

(Lietuvos statistikos departamento duomenys)

Su panašia skaitine informacija mes susiduriame kasdien — skaitydami laikraščius, naršydami internete, žiūrėdami televizijos laidas, klausydamiesi radijo.
Skaitinė informacija — tai *duomenys*.

Mokslo šaka, kuri tiria skaitinės informacijos (duomenų) rinkimą, tvarkymą ir analizavimą, vadinama ***statistika****.*

Duomenų rinkimas — pirmasis, labai svarbus ir nelengvas statistinio tyrimo etapas.

Kiekvienas tyrimas nagrinėja tam tikrą individų ar objektų grupę, kuri statistikoje vadinama ***generaline aibe****, arba* ***populiacija****.*

Pavyzdžiui, jei tiriate savo mokyklos 5–12 kl. mokinių matematikos mokymosi rezultatus, populiacija yra visi jūsų mokyklos 5–12 kl. mokiniai; jei tiriame 4–6 metų Lietuvos vaikų sveikatingumo rodiklius, tai populiacija — visi nurodyto amžiaus Lietuvos vaikai.

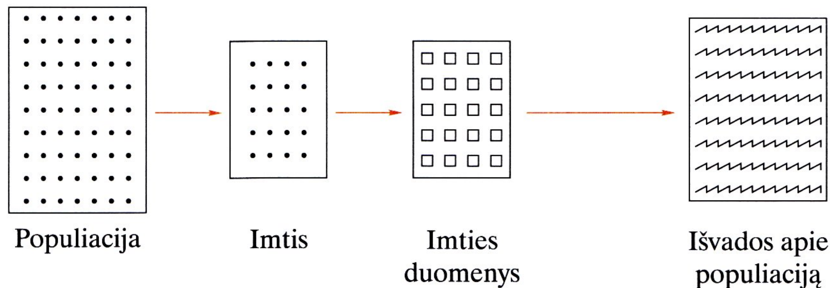
Nustatyti populiaciją ir jos dydį ne visuomet lengva. Pirmuoju aprašytu atveju tą padaryti nesunku — mokyklos raštinėje jūs greitai gausite reikalingą informaciją. O štai antruoju atveju tikslų populiacijos dydį nustatyti sunku. Mums čia gali padėti Visuotinio gyventojų surašymo duomenys, bet juk jie kasdien kinta, o surašymai neatliekami dažnai. Paskutinis visuotinis Lietuvos gyventojų surašymas įvyko 2001 m.

Nustačius populiaciją, galima rinkti duomenis iš visų jos narių arba tik iš jos dalies. Jei populiacija nedidelė, paprastai renkame duomenis iš visų populiacijos narių. Bet jei populiacijos narių skaičius didelis, duomenų rinkimas iš visų populiacijos narių užimtų labai daug laiko ir būtų brangus. Todėl dažniausiai tyrimui atrenkama dalis populiacijos.

Tyrimui atrinkta populiacijos dalis vadinama ***imtimi****.*

Reprezentatyvi imtis

Kad ištyrę imtį gautume patikimą informaciją apie visą populiaciją, imtis turi būti parinkta taip, kad iš tikrųjų atstovautų visai populiacijai. Sakoma — imtis turi būti *reprezentatyvi*. Imtis yra reprezentatyvi, jei ji gerai atspindi visas populiacijos proporcijas. Sakykime, kad norime išsiaiškinti, kuri LTV laida yra populiariausia. Norint sudaryti reprezentatyvią imtį, reikėtų imti tokį vaikų (paprastai imama vyresnių nei 4 metai), vyrų ir moterų skaičių, kad jų santykis būtų toks pat kaip ir visoje Lietuvoje. Čia galima atsižvelgti ir į kitas proporcijas: miesto ir kaimo gyventojų, dirbančiųjų ir bedarbių, ir kt. Imties sudarymas — ne tik mokslas, bet ir menas, kūryba, intuicija. Jei imtis reprezentatyvi, remiantis surinktais duomenimis padarytos išvados apie visą populiaciją bus patikimos.



Imties reprezentatyvumas susijęs ir su populiacijos didumu. Kuo didesnė imtis, tuo ji reprezentatyvesnė. Bet kai kada net ir didelę imtį parinkus, rezultatai gali būti nepatikimi. Taip yra dėl įvairių priežasčių, pvz., dėl to, kad labai daug į imtį atrinktų respondentų neatsakė į klausimus arba jų atsakymai nebuvo sąžiningi.

***Atsakymo lygmuo** — tai tyrime dalyvavusių žmonių skaičiaus ir atrinktų jame dalyvauti žmonių skaičiaus santykis. Jei jis mažesnis už* 0,5, *tai sakoma, kad tyrimui gresia **neatsakymo iškreiptis**.*

Pavyzdžiui, jei iš 100 žmonių į pateiktus klausimus atsakė tik 30, tai apklausai gresia neatsakymo iškreiptis, nes

$$\frac{30}{100} = 0{,}3 < 0{,}5.$$

Dėl melagingų atsakymų prieš rinkimus atliekamų apklausų rezultatai dažnokai nesutampa su rinkimų rezultatais. Taip pastaraisiais metais yra buvę ir Lietuvoje.

Kaip sudaryti imtį, kad ji būtų reprezentatyvi? Populiacijos elementus į imtį reikia rinkti atsitiktinai. Pavyzdžiui, sudarius visų populiacijos narių sąrašą ir juos sunumeravus, imties elementus atrenkame atsitiktinai, naudojant atsitiktinių skaičių lenteles (žr. 198 psl.). Jos dažnai pateikiamos įvairiuose statistikos vadovėliuose, žinynuose. Beje, šiandien tokį darbą gali padėti atlikti skaičiuoklis ar kompiuteris. Taip sudaryta imtis vadinama *paprastąja atsitiktine imtimi.*

Atliekant šiandien labai populiarias viešosios nuomonės tyrimo apklausas, pasitelkiamas *sluoksninės imties* metodas. Jo esmė tokia – pirmiausia populiacija suskirstoma į sluoksnius, o tada iš kiekvieno sluoksnio imama atsitiktinė imtis.
Pavyzdžiui, apklausiant Lietuvos gyventojus, jie gali būti padalijami į sluoksnius pagal tai, kur gyvena: didieji miestai, vidutiniai miestai, miesteliai, kaimai.



Po to iš kiekvieno sluoksnio imama atsitiktinė imtis.

Pratimai ir uždaviniai

314. Pasakykite, kas sudarys populiaciją, o kas imtį, jei tiriama:
a) Lietuvos dešimtokų matematinis raštingumas;
b) Lietuvos paauglių požiūris į tradicines tautos vertybes;
c) rinkimų teisę turinčių Lietuvos gyventojų požiūris į politikus;
d) vidutinė Lietuvos gyventojų TV žiūrėjimo per savaitę trukmė;
e) vidutinis pardavėjų atlyginimas Lietuvoje;
f) perkamiausia grožinės literatūros knyga Vilniuje šiais metais.

315. Nustatykite, kokią populiaciją apibūdina pateikti statistiniai teiginiai. Kuriems teiginiams gauti, jūsų manymu, buvo sudaryta imtis, o kuriuose surinkta informacija apie visus populiacijos narius?
a) Valstybinius brandos egzaminus šiemet Lietuvoje rinkosi 22% daugiau abiturientų negu pernai.
b) Ypač gausiai valstybinius egzaminus laiko Lietuvos gimnazijų moksleiviai — maždaug 95%.
c) Vilniuje šiemet mokyklas baigė 7973 abiturientai.
d) Širdies ir kraujagyslių ligų dažnis Prancūzijoje yra 30%–40% mažesnis negu Amerikoje ir Šiaurės Europoje.
e) Net dvidešimties Lietuvos politikų populiarumas įvertintas daugiau nei 1%.
f) Tarp 10 populiariausių Lietuvos televizijų laidų yra „Paleisk“, „Tėkmė“, „Duračio naujienos“.
g) Populiariausia LTV laida šį mėnesį žiūrovai pripažino „Panoramą“.

316. Remdamiesi lentelės duomenimis nustatykite, ar gresia statistiniam tyrimui neatsakymo iškreiptis.

a)

Į imtį atrinkta		Dalyvavo	
Vyrų	Moterų	Vyrų	Moterų
15 000	17 000	7546	7960

b)

Į imtį atrinktų gyventojų skaičius	Miestai	25 000
	Miesteliai	8000
	Kaimai	10 000
Tyrime dalyvavusiųjų gyventojų skaičius	Miestai	13 065
	Miesteliai	4950
	Kaimai	4897

317. Suplanuokite šiuos (ar kitus jūsų sugalvotus) statistinius tyrimus — nustatykite populiaciją, sudarykite imtį, parenkite klausimynus.
a) Jūsų mokyklos mokinių nuomonė apie popamokinę veiklą mokykloje.
b) Vidutinis jūsų mokyklos mokinių namų darbams atlikti skiriamas laikas per savaitę.
c) Jūsų mokyklos mokinių ir jų tėvų nuomonė apie įvairius mokinių vertinimo būdus mokykloje.
d) Jūsų mokyklos 9–12 kl. mokinių požiūris į įvairius muzikos žanrus.

318. Iš populiacijos, kurios dydis 200, sudarykite atsitiktinę imtį iš:
a) 20; b) 30 elementų.
Naudokitės atsitiktinių skaičių lentele, esančia vadovėlio gale (198 psl.). (Atsitiktinių skaičių lentelės paprastai pateikiamos įvairiuose statistikos vadovėliuose, žinynuose.)



Sudarykime imtį iš 15 elementų, naudodamiesi atsitiktinių skaičių lentele, kai populiacijos dydis 200. Kitaip tariant, mes turime sunumeravę 200 (nuo 1 iki 200) populiacijos narių ir norime atsitiktinai atrinkti 15 narių. Kuriuos numerius iš sąrašo pasirinkti, kad būtų užtikrintas atsitiktinumas? Naudokimės atsitiktinių skaičių lentele:

51772	74640	42331	29044
24033	23491	83587	**065**68
45939	60173	52078	25424
30586	**021**33	75797	45406
03585	79353	81938	82322
64937	**033**55	95863	20790
15630	64759	51135	98527
09448	56301	57683	30277
21631	91157	77331	60710
91097	**174**80	29414	**068**29
50532	25496	95652	42457
07136	40876	79971	54195
27989	64728	**107**44	**083**96
85184	73949	36601	46253
54398	21154	97810	36764
65544	34371	**095**91	**078**39
08263	65952	85762	64236
39817	67906	48236	16057
62257	**040**77	79443	95203
53298	90276	62545	21944

Kaip matome, šios lentelės skaičiai yra penkiaženkliai. Kadangi mūsų populiacijos nariai sunumeruoti triženkliais skaičiais (001–200), tai imdami skaičių iš atsitiktinių skaičių lentelės susitarkime žiūrėti tik į pirmus tris skaitmenis. Jei skaičiaus pirmi trys skaitmenys yra iš intervalo 001–200, tai populiacijos narys su tuo numeriu pateks į imtį.
Susitarkime lentelės skaičius tikrinti stulpeliais iš viršaus į apačią. Pirmas skaičius 51 772 netinka, nes iš pirmųjų trijų skaitmenų sudarytas skaičius 517 yra didesnis nei 200. Pirmasis mums tinkantis yra pirmojo stulpelio penktasis skaičius 03585, nes jo pirmųjų trijų skaitmenų sudarytas skaičius 35 yra mažesnis už 200.
Taigi į imtį įeis tie populiacijos nariai, kurių numeriai yra:
35, 156, 94, 71, 82, 21, 33, 174, 40, 107, 95, 65, 68, 83, 78.
Su atsitiktinių skaičių lentelėmis galima elgtis įvairiai. Pavyzdžiui, galima rinktis ne pirmuosius, kaip kad darėme, o paskutiniuosius skaitmenis, keliauti ne stulpeliais, o eilutėmis ir t. t.

14.2. Grafinis duomenų vaizdavimas

Dažnių ir santykinių dažnių lentelės

Atlikdami statistinius tyrimus, nustatome populiaciją, parenkame imtį, surenkame duomenis. Gautieji duomenys dažnai taip pat vadinami imtimi. Bet duomenų paprastai būna labai daug. Norėdami juos apibendrinti ir daryti išvadas, duomenis sutvarkome. Pats paprasčiausias duomenų tvarkymo būdas — dažnių lentelės sudarymas.

1 PAVYZDYS. Parduotuvėje „Basa" buvo tiriama, kokių dydžių moteriškų batų parduodama daugiausia. Atsitiktinai buvo atrinkta 20 žmonių, pirkusių moteriškus batus. Atrinktųjų moteriškų batų pirkėjų įsigyti batai buvo tokių dydžių:

36, 38, 39, 40, 38, 37, 37, 38, 39, 40,
37, 38, 39, 41, 37, 38, 38, 39, 41, 37.

Pirmiausia sutvarkykime šiuos duomenis, surašydami juos didėjimo tvarka:

36, 37, 37, 37, 37, 37, 38, 38, 38, 38, 38, 38, 39, 39, 39, 39, 40, 40, 41, 41.

Sudarykime *dažnių lentelę*:

1 lentelė

Batų dydis	36	37	38	39	40	41
Dažnis	1	5	6	4	2	2

Taip sutvarkyti duomenys yra patogesni įvairiems skaičiavimams atlikti.
Statistikoje dažnai skaičiuojami santykiniai dažniai — dažnis dalijamas iš imties dydžio (duomenų skaičiaus).
Sudarykime *santykinių dažnių lentelę*:

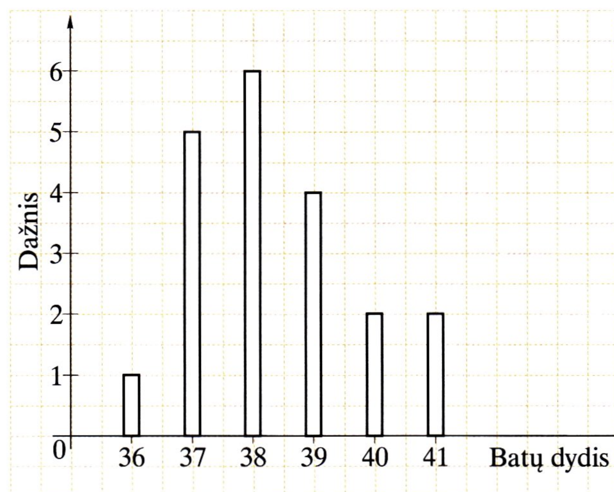
2 lentelė

Batų dydis	36	37	38	39	40	41
Santykinis dažnis	$\frac{1}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{2}{20}$

Stulpelinės diagramos

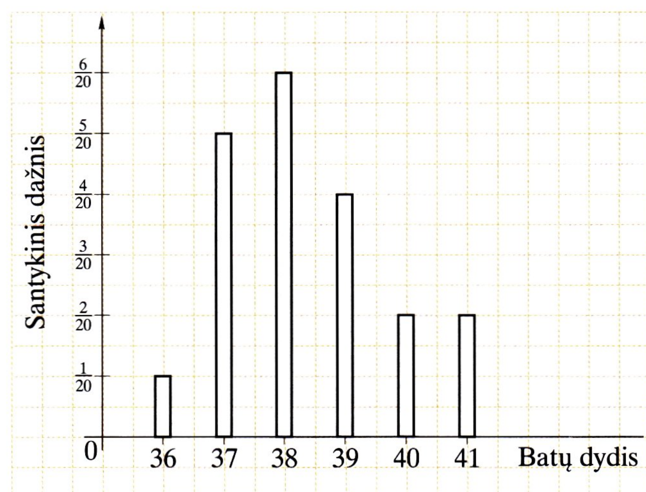
Dažnių lentelėse pateikti duomenys padeda geriau suprasti informaciją. Bet informacija bus dar aiškesnė, vaizdesnė ir įtaigesnė, jei surinktus duomenis pavaizduosime grafiškai. Vienas iš paprasčiausių grafinių duomenų vaizdavimo būdų — stulpelinė diagrama. Stulpeline diagrama vadiname bet kurią iš stačiakampių stulpelių sudarytą diagramą. Ji braižoma skaičių ašyje atidedant dažnius (santykinius dažnius), o tai ašiai statmenoje tiesėje atidedant skirtingas duomenų reikšmes.

Nubraižykime *dažnių stulpelinę diagramą* pagal 1 lentelės duomenis:



Galima nubraižyti ir santykinių dažnių stulpelinę diagramą. Tada vietoj dažnių, skaičių ašyje atidedame santykinius dažnius. Stulpelių aukštis yra proporcingas santykiniams dažniams.

Nubraižykime *santykinių dažnių stulpelinę diagramą* pagal 2 lentelės duomenis:

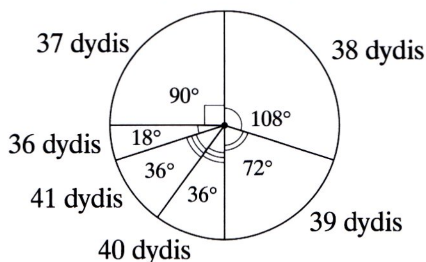


Skritulinės diagramos

Kai duomenų skirtingų reikšmių yra nedaug, tai dažnai naudojamas ir kitas duomenų vaizdavimo būdas — skritulinė diagrama. Brėžiamos skritulio išpjovos, kurių kampų dydžiai proporcingi duomenų dažniams. Nubraižykime skritulinę diagramą pagal 1 lentelės duomenis. Kadangi iš viso yra 20 duomenų, tai vieną duomenį atitiks $\frac{360^\circ}{20} = 18^\circ$ išpjovos kampas. Braižant skritulinę diagramą patogu sudaryti tokią lentelę:

Batų dydis	36	37	38	39	40	41
Dažnis	1	5	6	4	2	2
Išpjovos kampo dydis	$18^\circ \cdot 1 = 18^\circ$	$18^\circ \cdot 5 = 90^\circ$	$18^\circ \cdot 6 = 108^\circ$	$18^\circ \cdot 4 = 72^\circ$	$18^\circ \cdot 2 = 36^\circ$	$18^\circ \cdot 2 = 36^\circ$

Braižome *skritulinę diagramą*:

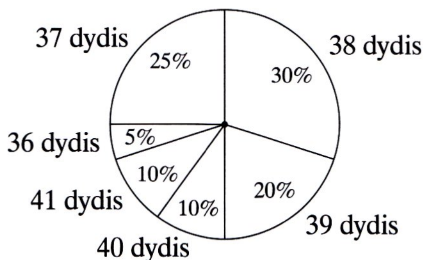


Pastaba. Skritulinėse diagramose išpjovų kampų dydžiai nenurodomi. Čia juos pateikiame tik aiškumo dėlei.

Dažnai braižoma *procentinė skritulinė diagrama*, kurioje dažniai išreiškiami procentais. Kadangi vieną procentą atitiks $\frac{360^\circ}{100} = 3{,}6^\circ$ dydžio išpjovos kampas, tai brėžimui patogi lentelė gali būti tokia:

Batų dydis	36	37	38	39	40	41
Dažnis %	$\frac{1}{20} \cdot 100\% = 5\%$	$\frac{5}{20} \cdot 100\% = 25\%$	$\frac{6}{20} \cdot 100\% = 30\%$	$\frac{4}{20} \cdot 100\% = 20\%$	$\frac{2}{20} \cdot 100\% = 10\%$	$\frac{2}{20} \cdot 100\% = 10\%$
Išpjovos kampo dydis	$3{,}6^\circ \cdot 5 = 18^\circ$	$3{,}6^\circ \cdot 25 = 90^\circ$	$3{,}6^\circ \cdot 30 = 108^\circ$	$3{,}6^\circ \cdot 20 = 72^\circ$	$3{,}6^\circ \cdot 10 = 36^\circ$	$3{,}6^\circ \cdot 10 = 36^\circ$

Braižome procentinę skritulinę diagramą:



Skritulinės diagramos vaizdžiai parodo, kurią visų duomenų dalį sudaro stebimos duomenų grupės.

Histogramos

Kai duomenų skirtingų reikšmių yra labai daug, tai nei stulpelinė, nei skritulinė diagramos nėra labai informatyvios. Pirmojoje būtų labai daug stulpelių ir sunku pastebėti kokią nors tendenciją, o antrojoje — labai daug sunkiai įvertinamų skritulio išpjovų. Tokiais atvejais duomenis patogu grupuoti į intervalus.

2 PAVYZDYS. Atliekant tyrimą, kiek sveria naujagimiai, buvo atsitiktinai paimta 30 naujagimių. Jų masė kilogramais buvo tokia:

3,2; 4,0; 3,6; 3,4; 3,0; 2,9; 2,3; 2,4; 2,5; 2,7;
3,8; 3,1; 3,5; 5,0; 4,5; 4,2; 3,2; 3,3; 3,1; 3,4;
2,9; 3,6; 3,8; 3,0; 4,8; 2,8; 4,1; 2,6; 4,1; 2,3.

Matome, kad duomenų reikšmės yra intervalo [2,3; 5,0] skaičiai (mažiausia naujagimio masė — 2,3 kg, didžiausia — 5,0 kg).

Sugrupuokime šiuos duomenis į vienodo ilgio intervalus. Kiek jų reikėtų imti? Intervalų skaičius gali būti įvairus, bet dažniausiai imama nuo 5 iki 20.

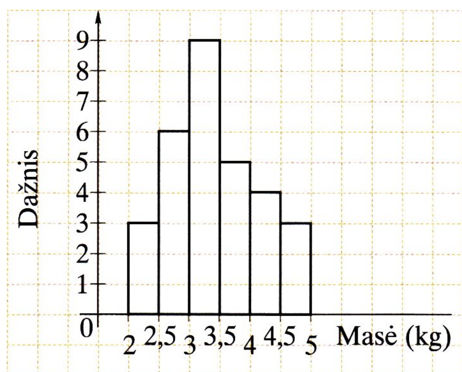
Vietoj intervalo [2,3; 5,0] imkime intervalą [2; 5] ir padalykime jį į 6 dalis:

[2; 2,5), [2,5; 3), [3; 3,5), [3,5; 4), [4; 4,5), [4,5; 5].

Sudarykime sugrupuotų duomenų dažnių lentelę:

Intervalas	[2; 2,5)	[2,5; 3)	[3; 3,5)	[3,5; 4)	[4; 4,5)	[4,5; 5]
Dažnis	3	6	9	5	4	3

Remdamiesi lentele braižykime stulpelinę diagramą, sudarytą iš besiliečiančių stačiakampių, kurių aukščiai lygūs dažniams:



Tokia stulpelinė diagrama vadinama *histograma*.
Paprastai statistikoje braižomos ne dažnių, bet santykinių dažnių histogramos. Nuo dažnių histogramos jos skiriasi tik reikšmėmis, atidėtomis dažnių ašyje.

Pratimai ir uždaviniai

319. Trijų 10-ųjų klasių mokiniai rašė matematikos kontrolinį darbą. Kontrolinio darbo rezultatai yra tokie:

10^a kl.	6, 9, 7, 8, 5, 6, 7, 4, 2, 9, 8, 6, 3, 10, 7, 5, 4, 6, 9, 7, 7, 6, 3, 10, 10, 8, 7, 9, 6, 8
10^b kl.	5, 8, 6, 7, 4, 5, 6, 3, 2, 8, 7, 5, 3, 9, 6, 6, 5, 7, 10, 8, 8, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 5
10^c kl.	7, 7, 6, 8, 9, 10, 5, 8, 5, 6, 9, 8, 8, 7, 7, 5, 4, 3, 8, 8, 7, 10, 2, 3, 6, 8

a) Sutvarkykite duomenis, sudarydami kiekvienos klasės dažnių ir santykinių dažnių lenteles.

b) Nubraižykite kiekvienos klasės dažnių ir santykinių dažnių stulpelines diagramas.

320. Tiriant moksleivių požiūrį į skaitymą, buvo apklausta 500 moksleivių. Kiekvienam moksleiviui reikėjo užpildyti tokį apklausos lapą (kiekviename stulpelyje pliusu pažymint labiausiai tinkantį atsakymą):

	Skaitau tik todėl, kad liepia	Patinka skaityti	Mokėjimas skaityti labai pravers ateityje
Visiškai nesutinku	+		+
Iš dalies nesutinku			
Iš dalies sutinku		+	
Visiškai sutinku			

Gauti tokie apklausos duomenys:

	Skaitau tik todėl, kad liepia	Patinka skaityti	Mokėjimas skaityti labai pravers ateityje
Visiškai nesutinku	150	100	30
Iš dalies nesutinku	90	130	50
Iš dalies sutinku	160	120	100
Visiškai sutinku	100	150	320

Nubraižykite tris stulpelines diagramas, vaizduojančias apklausos duomenis.

321. Tiriant, koks vaikų skaičius dažniausiai pasitaiko šeimose, buvo apklausta 600 šeimų, auginančių vaikus, ir gauti tokie duomenys:

1 vaikas	2 vaikai	3 vaikai	4 ir daugiau vaikų
200	245	105	50

Pavaizduokite šio tyrimo rezultatus skrituline diagrama — nubraižykite dažnių ir procentinę diagramas.

322. Buvo atliekamas tyrimas apie moksleivių mokymosi pasiekimus. Lentelėje pateiktas tyrime dalyvavusių moksleivių skaičiaus pasiskirstymas procentais pagal jų gyvenamą vietą:

Miestai	Rajono centrai	Miesteliai	Kaimai
40	25	15	20

Pavaizduokite šiuos duomenis skrituline diagrama.

323. Tiriant, kaip dažnai vienos įmonės darbuotojai naudojasi internetu, gauti tokie duomenys:

Kasdien	38%
Bent kartą per savaitę	43%
Bent kartą per mėnesį	15%
Visai nesinaudoja	4%

Pavaizduokite apklausos duomenis skrituline diagrama.

324. Lentelėje pateikti duomenys apie įmonės darbuotojų skaičių pagal amžiaus grupes:

Amžius	20–29	30–39	40–49	50–59	virš 59
Darbuotojų skaičius	60	540	270	120	70

Pavaizduokite šiuos duomenis skrituline diagrama (dažnių ir procentine) bei histograma.

325. Savaitraščio redakcija pateikė vieno mėnesio duomenis apie gaunamų reklaminių skelbimų skaičių per dieną:

25	12	10	34	15
30	8	14	20	6
42	32	16	22	4
24	36	18	40	28

Sugrupuokite šiuos duomenis į intervalus [4; 14), [14; 24), [24; 34), [34; 44) ir pavaizduokite juos histograma.

326. Matuojant 30-ies šešiolikmečių vaikinų ūgį gauti tokie rezultatai:

158	165	172	180	182	150
160	170	163	174	178	162
172	171	168	169	157	159
151	167	174	154	181	165
158	164	178	167	155	159

Sugrupuokite šiuos duomenis į intervalus, pasirinkę intervalo ilgį, lygų 5, ir nubraižykite histogramą.

327. Vilma registravo vieno mėnesio išlaidas higienos prekėms. Štai jos rezultatai:

45	68	75	20	100	85	24
57	94	62	52	37	48	38
25	41	50	36	70	22	15
28	46	12	53	44	30	20
32	26					

Sugrupuokite duomenis į intervalus, kurių ilgis 10, ir nubraižykite sugrupuotų duomenų histogramą.

328. Auklėtoja surašė savo auklėjamosios klasės mokinių matematikos valstybinio egzamino rezultatus:

12	49	62	53	45	70	81	74	92	31
56	75	34	46	14	93	84	58	20	9
48	72	81	58	27	39	88	23		

Sugrupuokite duomenis į pasirinkto ilgio intervalus ir nubraižykite histogramą.

329. Nedidelės parduotuvės savininkas surašė, kiek kilogramų bananų jis pardavė kiekvieną vieno mėnesio dieną:

12	14	18	22	15	6	3
10	9	13	17	16	21	5
13	8	17	20	8	16	9
18	10	14	21	7	11	8
15	9					

Sugrupuokite duomenis į pasirinkto ilgio intervalus ir nubraižykite histogramą.

14.3. Skaitinės duomenų charakteristikos

Grafiškai pavaizduoti duomenys padeda geriau suprasti informaciją, pastebėti tendencijas. Bet norėdami glaustai apibūdinti imties savybes, palyginti dideles duomenų grupes, vartojame įvairias skaitines charakteristikas, t. y. kurią nors imties savybę nusakome skaičiumi.

Vidurkis

Vidurkis yra viena iš plačiausiai vartojamų imties skaitinių charakteristikų. Skaičiuojame pažymių vidurkį, vidutinį atlyginimą, vidutinę paros temperatūrą ir pan.
Vidurkį gauname sudėję visas imties duomenų reikšmes ir gautąją sumą padalyję iš duomenų skaičiaus.

Jei yra n duomenų, kurių reikšmės yra $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tai jų vidurkis (žymimas $\bar{x}$) yra apskaičiuojamas taip:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Kitaip tariant, imties vidurkis — tai duomenų reikšmių aritmetinis vidurkis.

PAVYZDYS.
Penkiolikos mokinių matematikos kontrolinio darbo rezultatai yra tokie:

2; 6; 6; 6; 7; 7; 7; 7; 7; 8; 8; 8; 9; 9; 10.

Apskaičiuokime kontrolinio darbo įvertinimų vidurkį:

$$\bar{x} = \frac{2+6+6+6+7+7+7+7+7+8+8+8+9+9+10}{15} \approx 7{,}13.$$

Vidurkis gali ir nesutapti su jokia galima duomenų reikšme. Pateiktame pavyzdyje tą ir matome — pažymio 7,13 nėra. Vidurkis yra skaičius, apie kurį išsisklaidę imties duomenų reikšmės. Jis — tarsi duomenų pusiausvyros taškas. Vidurkį galime interpretuoti ir taip — jei visos duomenų reikšmės būtų maždaug vienodos, tai jos būtų „maždaug“ lygios vidurkiui.

Kaip skaičiuojamas vidurkis, kai duomenys pateikti dažnių lentele?
Sudarykime 1 pavyzdžio duomenų dažnių lentelę:

Pažymys	2	6	7	8	9	10
Dažnis	1	3	5	3	2	1

Tokiu atveju skaičiuodami vidurkį, duomenų reikšmes dauginame iš atitinkamo dažnio ir sudedame, o gautąją sumą dalijame iš duomenų skaičiaus:

$$\bar{x} = \frac{2\cdot 1 + 6\cdot 3 + 7\cdot 5 + 8\cdot 3 + 9\cdot 2 + 10\cdot 1}{15} \approx 7{,}13.$$

Moda

Vidurkis ne visada yra gera imties charakteristika. Jei tarp imties duomenų yra kelios labai išsiskiriančios reikšmės, tai vidurkis neatspindės to, kas būdinga daugumai.
Sakykime, kad nedidelės individualios įmonės darbuotojų atlyginimai litais yra tokie: 6000; 900; 700; 700; 800; 430; 650. Įmonės darbuotojų atlyginimų vidurkis 1454,29 Lt. Akivaizdu, kad šis skaičius nelabai gerai charakterizuoja tos įmonės daugelio darbuotojų atlyginimus, nes viską nulemia vienas didžiausias (matyt, vadovo) atlyginimas.
Panašiais atvejais galime naudoti kitą charakteristiką — *modą*.

Moda — dažniausiai pasikartojanti duomenų reikšmė. Jei visos duomenų reikšmės pasikartoja vienodai dažnai, sakome, kad modos nėra. Jei yra kelios vienodai dažnai pasikartojančios duomenų reikšmės, visos jos vadinamos modomis (žymime M_o*).*

Pavyzdžiui, nagrinėtos atlyginimų imties moda $M_o = 700$;
imtis 300; 300; 400; 400; 500; 500 modos neturi;
imtis 40; 70; 70; 85; 85; 90 turi dvi modas — 70 ir 85.

Mediana ir kvartiliai

Dažnai imtis yra skirstoma į dalis. Pavyzdžiui, panagrinėsime vieną imties charakteristiką, vadinamą *mediana*. Norėdami ją rasti, visų pirma išrikiuojame duomenis didėjimo tvarka. (Taip sutvarkyti duomenys vadinami *variacine eilute*.)

Mediana (žymime M_d*) vadiname skaičių, už kurį yra ne didesni ne mažiau kaip pusė imties duomenų reikšmių ir ne mažiau kaip pusė reikšmių yra ne mažesni.*

- Kai yra nelyginis skaičius duomenų, tai mediana lygi viduriniojo variacinės eilutės nario reikšmei.
- Kai yra lyginis skaičius duomenų, tai mediana laikome dviejų viduriniųjų variacinės eilutės duomenų reikšmių aritmetinį vidurkį.

Pavyzdžiui, imties 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 6, 8 mediana lygi 5:

$\leqslant \frac{1}{2}$ duomenų

2, 3, 4, 4, **5**, 6, 6, 6, 8 $\qquad M_d = 5$

$\leqslant \frac{1}{2}$ duomenų

Imties 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 8 mediana lygi 3,5:

$\leqslant \frac{1}{2}$ duomenų

1, 2, 2, **3**, **4**, 4, 5 ,8 $\qquad M_d = \frac{3+4}{2} = 3,5$

$\leqslant \frac{1}{2}$ duomenų

Kartais naudojamos duomenų skaitinės charakteristikos vadinamos *kvartiliais*.

Pirmasis kvartilis *(žymima Q_1) — tai skaičius, už kurį yra ne didesni ne mažiau kaip ketvirtadalis duomenų reikšmių ir ne mažesni ne mažiau kaip trys ketvirtadaliai reikšmių.*
Trečiasis kvartilis *(žymima Q_3) — tai skaičius, už kurį yra ne didesni ne mažiau kaip trys ketvirtadaliai duomenų reikšmių ir ne mažesni ne mažiau kaip ketvirtadalis reikšmių.*

Kvartilių ieškome panašiai, kaip medianos.
Pavyzdžiui, imties 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 6, 8 pirmasis kvartilis yra 4:

$\leqslant \frac{1}{4}$ duomenų

2, 3, **4**, **4**, 5, 6, 6, 6, 8 $\quad Q_1 = 4$

$\leqslant \frac{3}{4}$ duomenų

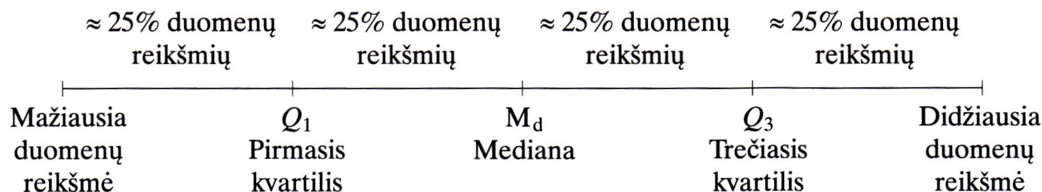
Imties 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 8 trečiasis kvartilis yra 4,5:

$\leqslant \frac{3}{4}$ duomenų

1, 2, 2, 3, 4, **4**, **5**, 8 $\quad Q_3 = \frac{4+5}{2} = 4,5$

$\leqslant \frac{1}{4}$ duomenų

Medianą ir kvartilius galima pavaizduoti tokia schema:



Dispersija

Palyginkime dviejų įmonių darbuotojų atlyginimus (litais):

I:	500,	800,	1000,	2000,	2500,	4000;
II:	1600,	1700,	1800,	1800,	1900,	2000.

Abiejų įmonių darbuotojų atlyginimų vidurkiai, t. y. vidutiniai atlyginimai, yra vienodi — 1800 Lt. Bet pirmosios įmonės darbuotojų atlyginimai labai skirtingi, o antrosios — beveik vienodi, artimi vidutiniam atlyginimui.
Nuokrypį nuo vidurkio apibūdina imties *dispersija*.

Dispersija yra dydis, kuris nusako imties duomenų išsisklaidymo apie vidurkį didumą. Imties $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dispersija randama pagal formulę:

$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n};$$

čia $\bar{x}$ — imties vidurkis.

Apskaičiuokime aukščiau pateiktų duomenų dispersijas:

$$\text{I:}\quad s^2 = \frac{1}{6} \cdot \big((500 - 1800)^2 + (800 - 1800)^2 + (1000 - 1800)^2 + \\ + (2000 - 1800)^2 + (2500 - 1800)^2 + (4000 - 1800)^2\big) = \\ = 1\,450\,000;$$

$$\text{II:}\quad s^2 = \frac{1}{6} \cdot \big((1600 - 1800)^2 + (1700 - 1800)^2 + (1800 - 1800)^2 + \\ + (1800 - 1800)^2 + (1900 - 1800)^2 + (2000 - 1800)^2\big) \approx \\ \approx 16\,667.$$

Pirmosios imties dispersija yra žymiai didesnė. Tai rodo, kad didelė pirmosios imties duomenų dalis yra labiau nutolusi nuo vidurkio negu antrosios imties.

Pratimai ir uždaviniai

330. Apskaičiuokite duomenų vidurkį, dispersiją. Nurodykite modą, medianą, pirmąjį ir trečiąjį kvartilius.

a) 2, 3, 3, 4, 5, 8, 12, 17, 20;
b) 3, 6, 9, 10, 11, 13, 14, 16, 18, 110, 110;
c) 3, 3, 3, 4, 5, 8, 11, 14, 15, 17;
d) 5, 6, 6, 6, 8, 11, 13, 15, 19, 20, 20, 22;
e) 3, 12, 1, 6, 24, 2, 15, 19, 6, 12, 15, 30, 12, 21, 7, 15, 52;
f) 3,2; 4,6; 7,6; 2,0; 7,5; 2,1; 2,5; 8,6; 4,6; 6,3;
g) 6,4; 5,7; 4,7; 3,4; 3,7; 5,4; 3,4; 5,0; 8,5; 5,1.

331. Buvo tiriama, koks yra 10-mečių vaikų ūgis. Pamatavus 20 vaikų ūgį centimetrais, gauti tokie rezultatai:

132	136	120	130	125
124	129	133	122	110
133	116	100	127	146
127	131	118	138	134

Apskaičiuokite imties vidurkį ir dispersiją. Raskite modą, medianą, pirmąjį ir trečiąjį kvartilius.

332. Analizuojant įmonės 24 darbuotojų sergamumą, buvo suskaičiuota, kiek darbo dienų per metus jie nedirbo dėl ligos:

20	13	11	10	7	15	2	0	23	8	9	6
3	5	8	4	6	12	15	14	13	5	8	4

Apskaičiuokite imties vidurkį ir dispersiją. Raskite modą, medianą, pirmąjį ir trečiąjį kvartilius.

333. Apskaičiuokite žemiau pateiktų imčių vidurkius. Nubraižykite stulpelines diagramas.

11-ųjų klasių matematikos ir lietuvių kalbos metiniai įvertinimai

Pažymys	3	4	5	6	7	8	9	10
Dažnis (matematika)	2	7	8	12	20	10	6	5
Dažnis (lietuvių klb.)	–	6	8	14	17	12	7	6

334. Tyrinėdamas tam tikros rūšies vabzdžius, mokslininkas matavo jų ilgius (cm) ir duomenis surašė lentelėje:

Ilgis	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	3,1	3,2
Dažnis	2	4	7	8	10	6	5	3

Apskaičiuokite imties vidurkį. Sugrupavę duomenis į 4 intervalus, nubraižykite imties histogramą.

335. Norėdami sužinoti vartotojų nuomonę apie naują produktą, gamintojai paprašė 30 žmonių įvertinti jos kokybę 5 balų sistema. Gauti tokie rezultatai:

Įvertinimas	1	2	3	4	5
Dažnis	1	4	7	10	8

Apskaičiuokite imties vidurkį. Pavaizduokite duomenis skrituline diagrama.

336. Ritos ir Lauros matematikos I pusmečio įvertinimai buvo tokie:
Rita: 9, 8, 8, 7, 6, 10, 7, 8, 8, 9, 5, 10, 8, 7, 8;
Laura: 6, 7, 7, 6, 4, 8, 5, 6, 7, 5, 8.

1) Sutvarkykite imtis, sudarydami dažnių lenteles.
2) Apskaičiuokite imčių vidurkius ir dispersijas.
3) Nurodykite modą, medianą, pirmąjį ir trečiąjį kvartilius.
4) Naudodamiesi gautais rezultatais išanalizuokite mergaičių mokymosi rezultatus: kurios rezultatas aukštesnis, t. y. didesnis duomenų vidurkis; kurios rezultatas stabilesnis, t. y. mažesnė duomenų dispersija.
5) Pavaizduokite duomenis stulpeline diagrama.

337. Kęstas ir Rimas treniruodamiesi mėtė baudas: 20 kartų po 12 metimų kiekvienas. Jų pataikymų skaičius pateiktas lentelėje:

K	6	10	7	8	10	5	6	4	7	8	12	9	11	3	10	7	9	12	5	9
R	5	4	3	7	9	10	4	6	7	8	8	9	10	9	11	7	8	9	10	11

1) Apskaičiuokite ir palyginkite imčių vidurkius, dispersijas.
2) Nurodykite modą, medianą, pirmąjį ir trečiąjį kvartilius.
3) Pavaizduokite duomenis histograma, sugrupavę juos į pasirinkto ilgio intervalus.

338. Dvyliktokų valstybinių istorijos ir lietuvių kalbos testų įvertinimai yra tokie:
Istorija: 22, 32, 34, 37, 42, 49, 51, 55, 58, 58, 62, 67, 68, 69, 70, 72, 75, 75, 75, 82, 87, 92, 95, 99, 100;
Lietuvių kalba: 18, 19, 21, 22, 26, 28, 29, 29, 31, 31, 42, 42, 45, 48, 48, 51, 51, 51, 51, 58, 62, 77, 79, 85, 96.

1) Apskaičiuokite imčių vidurkius ir dispersijas.
2) Nurodykite modą, medianą, pirmąjį ir trečiąjį kvartilius.
3) Sugrupuokite duomenis į intervalus, parinkę intervalo ilgį, lygų 10, ir nubraižykite histogramas.
4) Išanalizuokite šių dviejų testų rezultatus, remdamiesi atliktais skaičiavimais.

339. Atlikite bandymą: pasidalykite grupelėmis po 4–5 mokinius. Kiekvienas meskite monetą 6 kartus ir fiksuokite, kiek kartų iš 6 metimų atsivertė herbas. Kiekvienas atlikite po 5 metimų serijas. Grupelės duomenis apibendrinkite, surašydami į dažnių lentelę. Pavaizduokite juos stulpeline ir skritulinėmis diagramomis. Apskaičiuokite vidurkį.

Herbo atsivertimų skaičius	0	1	2	3	4	5	6
Dažnis							

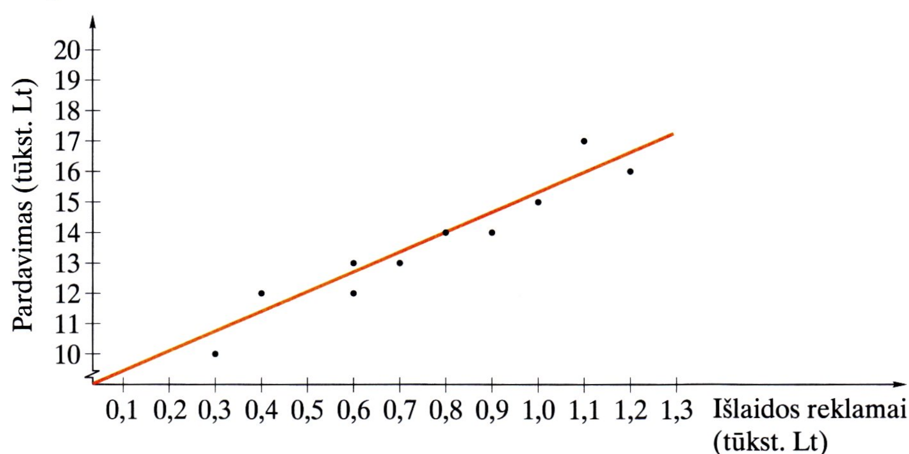
14.4. Koreliacija

Iki šiol nagrinėjome tokius statistinius tyrimus, kuriuose buvo renkami ir analizuojami duomenys apie kurį nors vieną tiriamų objektų požymį — naujagimių masę, batų dydį, kontrolinio darbo įvertinimus, atlyginimus ir kt. Tačiau praktiškai dažniau tiriami du to paties objekto požymiai ir ieškoma ryšio tarp jų. Pavyzdžiui, ekonomistus domina, kaip atlyginimas priklauso nuo išsilavinimo, medikus — ryšys tarp surūkytų cigarečių skaičiaus ir širdies ligų dažnumo, psichologus — ryšys tarp tėvų išsilavinimo ir vaikų išsilavinimo, ir t. t. Nustačius ryšius tarp tiriamų požymių, žinant vieno kintamojo reikšmes, galima apytiksliai įvertinti kito kintamojo reikšmes, stebint vieną požymį, prognozuoti kito požymio pokyčius.

1 PAVYZDYS. Tiriant, ar yra ryšys tarp įmonės išlaidų, skiriamų reklamai, ir pardavimų apimties, buvo suregistruoti 10 mėnesių duomenys:

Išlaidos reklamai (tūkst. Lt)	0,3	0,4	0,6	0,8	0,7	1,2	1,0	1,1	0,9	0,6
Pardavimas (tūkst. Lt)	10	12	13	14	13	16	15	17	14	12

Pavaizduokime šiuos duomenis koordinačių plokštumoje taškais $(x_i; y_i)$, kur x_i — išlaidos reklamai, y_i — pardavimų apimtys. Gausime taip vadinamą duomenų *sklaidos diagramą*.



Matome, kad diagramos taškai nėra vienoje pasviroje tiesėje, bet yra ne daug nuo jos nutolę. Be to, didėjant vieno iš kintamųjų reikšmėms, didėja ir kito. Tokiu atveju sakoma, kad tarp požymių yra teigiama koreliacija, arba kad stebimi požymiai yra teigiamai koreliuoti.

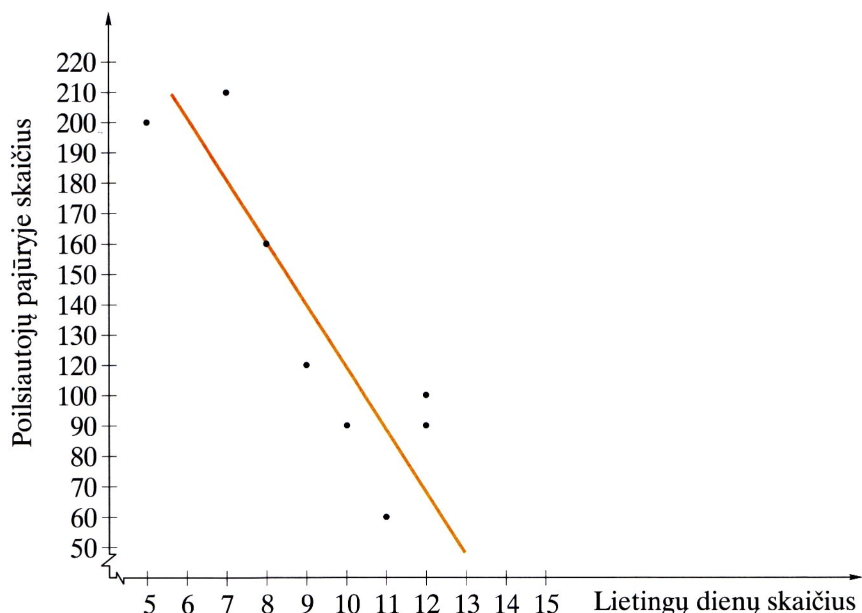
Remiantis tyrimo duomenimis galima teigti, kad didėjant išlaidoms reklamai, didėja ir parduodamų prekių kiekis, t. y. įmonės išlaidos reklamai ir pardavimų apimtys yra teigiamai koreliuoti požymiai.

Remdamiesi diagrama galime prognozuoti, kad, pvz., jei įmonė reklamai išleistų 0,5 tūkst. litų, tai galėtų tikėtis, kad pardavimų apimtis bus apie 12 tūkst. litų.

2 PAVYZDYS. Ar (ir kaip) priklauso poilsiautojų skaičius vasarą nuo lietingų dienų skaičiaus? Norėdami tai išsiaiškinti, poilsio namų prie jūros ir kaimo turizmo sodybos šeimininkai 8 metus iš eilės registravo vasaros mėnesių lietingų dienų skaičius ir poilsiautojų skaičius. Štai kokius duomenis jie gavo:

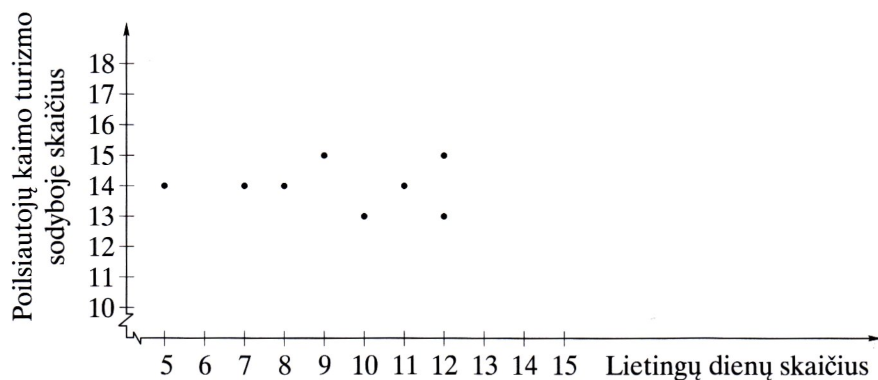
Lietingų dienų skaičius	10	9	12	11	5	7	12	8
Poilsiautojų pajūryje skaičius	90	120	100	60	200	210	90	160
Poilsiautojų kaimo turizmo sodyboje skaičius	13	15	15	14	14	14	13	14

Pirmiausia pavaizduokime duomenis sklaidos diagrama, iliustruojančia, kaip nuo lietingų dienų skaičiaus priklauso poilsiautojų pajūryje skaičius:



Duomenis vaizduojantys taškai vėl grupuojasi apie pasvirąją tiesę. Tik šiuo atveju vieno kintamojo reikšmėms (lietingų dienų skaičiui) didėjant, kito (poilsiautojų pajūryje skaičius) reikšmės mažėja. Tokiu atveju sakoma, kad tarp požymių yra neigiama koreliacija, arba kad požymiai yra neigiamai koreliuoti.

Nubraižykime kitą sklaidos diagramą su duomenimis apie lietingų dienų ir poilsiautojų kaime skaičių:



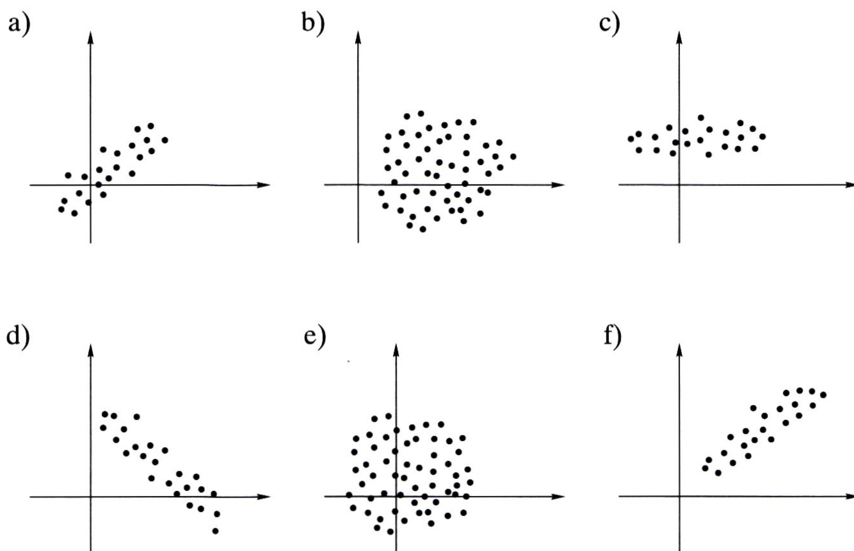
Čia taškai, vaizduojantys nagrinėjamus duomenis, nesigrupuoja apie kurią nors pasvirąją tiesę.

Tokiais atvejais sakoma, kad tiriami požymiai nėra koreliuoti, arba kad tarp tiriamų požymių nėra sąryšio.


Ar turi įtakos lietingų dienų skaičius poilsiautojų kaimo turizmo sodyboje skaičiui?

Pratimai ir uždaviniai

340. Pasakykite, ar yra tiesinis ryšys (koreliacija) tarp pavaizduotų požymių. Tuo atveju, kai jis yra, nurodykite, ar jis teigiamas, ar neigiamas.



341. Pavaizduokite duomenis koordinačių plokštumoje ir nustatykite, ar tarp požymių X ir Y yra koreliacija. Ar ji teigiama, ar neigiama?

a)

X	5	2	0	4	6	9	3	5	6	6	2	4
Y	6	7	8	5	5	2	8	7	3	4	8	6

b)

X	5	4	4	9	0	5	3	8	9	6	7	1
Y	7	2	6	8	1	6	5	9	7	7	5	2

c)

X	4	9	1	7	3	6	2	8	6	1	5	0	8
Y	7	9	9	1	1	9	8	2	5	2	4	9	1

342. Lentelėje pateikti duomenys apie 12 mokinių ūgį (cm) ir masę (kg). Pavaizduokite duomenis koordinačių plokštumoje taškais $(x; y)$, kur x — ūgis (cm), y — masė (kg). Ar šie požymiai koreliuoti? Jei koreliuoti, tai kaip?

Ūgis	153	158	180	145	166	168	178	162	152	157	160	165
Masė	58	62	72	56	65	68	75	65	62	58	62	63

343. Lentelėje pateikta skaičius valandų, kurias 10 atsitiktinai atrinktų studentų praleido laboratorijose ir paskaitose per vieną savaitę:

Laboratorijose	3	8	9	7	2	10	6	4	1	5
Paskaitose	5	9	10	8	1	7	4	3	2	6

Pavaizdavę duomenis koordinačių plokštumoje nustatykite, ar tarp jų yra koreliacija.

344. Tiriant, koks yra ryšys tarp metinio pažymio ir baigiamojo egzamino, gauti tokie duomenys:

Metinis pažymys	6	5	8	7	9	4	8	10	7	6
Egzamino įvertinimas	8	7	7	6	8	6	10	10	5	8

Pavaizduokite duomenis koordinačių plokštumoje ir nustatykite, ar tarp jų yra tiesinis sąryšis (koreliacija).

345. Tiriant kraujo spaudimo priklausomybę nuo amžiaus, gauti tokie duomenys:

Amžius	55	41	71	37	63	47	55	60	67	42	38	49
Kraujospūdis	146	124	160	118	150	128	150	154	151	140	115	145

Ar yra tarp šių požymių koreliacija?

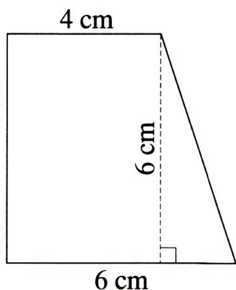
346. Surinkite tokius duomenis savo klasėje:
a) mokinių ūgis ir svoris;
b) mergaičių ūgis ir batų dydis;
c) berniukų ūgis ir batų dydis;
d) mergaičių ir jų mamų ūgis;
e) berniukų ir jų mamų ūgis;
f) jūsų klasės mokinių matematikos ir lietuvių kalbos pusmečio pažymiai;
g) jūsų klasės mokinių matematikos ir istorijos pusmečio pažymiai.
Surinktus duomenis pavaizduokite koordinačių plokštumoje ir nustatykite, ar jie tarpusavyje koreliuoti.

14.5. Geometrijos uždaviniai

347. Plane, kurio mastelis 1 : 10 000, pavaizduotas žemės sklypas. Sklypas pavaizduotas stačiąja trapecija, kurios pagrindai lygūs 6 cm ir 4 cm, o aukštinė lygi 6 cm.

a) Apskaičiuokite žemės sklypo plotą arais; hektarais.

b) Koks sklypo perimetras?

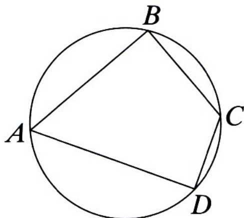


Mastelis 1 : 10 000



Vienas aras užima kvadratą, kurio kraštinė lygi 10 m.
Vienas hektaras užima kvadratą, kurio kraštinė lygi 100 m.

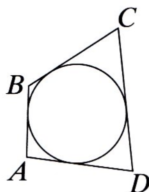
348. Apskaičiuokite $\angle D$ dydį, jei keturkampis $ABCD$ įbrėžtinis ir $\angle A : \angle B : \angle C = 2 : 3 : 4$.





Įbrėžtinio keturkampio priešingųjų kampų dydžių sumos yra lygios.
Keturkampio kampų suma lygi 360°.

349. Apskaičiuokite keturkampio $ABCD$ kraštinės DA ilgį, jei $P_{ABCD} = 72$ cm, $AB : BC : CD = 2 : 3 : 4$, o keturkampis yra apibrėžtinis.





Apibrėžtinio keturkampio priešingų kraštinių ilgių sumos yra lygios.

14.6. Pasitikrinkime

350. Pasakykite, kas sudarys populiaciją, o kas imtį, kai tiriama:
a) Lietuvos aštuntokų gamtos mokslų žinių lygis;
b) vidutinis mokytojų atlyginimas Lietuvos valstybinėse mokyklose;
c) Vilniaus gyventojų suvartojamo vandens kiekis.

351. Iš populiacijos, kurios dydis 300, sudarykite atsitiktinę imtį iš: a) 20; b) 30 elementų, naudodamiesi atsitiktinių skaičių lentele (žr. 198 psl.).

352. Tiriant, kaip dažnai gyventojai kreipiasi pagalbos į policiją, buvo registruojami skambučiai per atsitiktinai parinktas 24 pastarųjų mėnesių dienas:

5	8	9	5	7	6	6	6	5	6	3	5
7	4	4	6	4	3	7	8	4	8	7	4

Sudarykite dažnių ir santykinių dažnių lenteles. Pavaizduokite duomenis stulpeline diagrama.

353. Į klausimą „Ar jūs pritariate teniso kortų įrengimui parke?“ atsakė 80 atsitiktinai parinktų žmonių. Apklausos duomenys tokie:

Taip	20
Ne	45
Neturiu nuomonės	15

Pavaizduokite duomenis skrituline diagrama (dažnių ir procentine).

354. Tirdami, kiek laisvalaikio žmonės skiria knygų skaitymui, atsitiktinai parinkus apklausti 24 žmonės. Pasirodė, kad per paskutinius 4 mėnesius skaitymui skirtų valandų skaičius yra toks:

40	51	68	44	31	54
80	52	37	39	12	27
42	85	13	24	14	9
92	32	24	8	74	18

Sugrupuokite duomenis į intervalus, kurių ilgis 10, ir nubraižykite histogramą.

355. Paulius kasdien, 36 dienas iš eilės, darė atsispaudimus. Paulius užsirašydavo, kiek atsispaudimų jis padarydavo per dieną. Duomenis jis surašė tokia lentele:

Atsispausimų per dieną skaičius	42	47	53	57	60	62
Dažnis	6	5	7	12	4	2

Kiek vidutiniškai atsispaudimų per dieną padarydavo Paulius?

356. Apskaičiuokite duomenų vidurkį, dispersiją. Nurodykite modą, medianą, pirmąjį ir trečiąjį kvartilius:
a) 4, 6, 8, 3, 7, 8, 8, 6, 6, 4, 3, 4, 7, 10;
b) 59, 57, 48, 47, 36, 45, 40, 36, 38, 46.

357. Čia pateikti 11 klasės matematikos kontrolinio darbo rezultatai:

9	7	8	4	7	10	6	7	9	7
8	7	10	9	8	3	6	5	7	4
7	9	5	4	5	3	7	6	8	5

Apskaičiuokite duomenų vidurkį, dispersiją. Nurodykite modą, medianą, pirmąjį ir trečiąjį kvartilius. Pavaizduokite duomenis stulpeline diagrama.

358. Čia pateikti dviejų komandų, dalyvavusių lengvosios atletikos varžybose, dalyvių surinkti taškai:

I komanda	65	66	68	70	72	75	76	78	79	80	81	82
II komanda	72	34	95	86	83	45	58	99	86	40	62	56

1) Apskaičiuokite imčių vidurkius ir dispersijas.
2) Nurodykite modą, medianą, pirmąjį ir trečiąjį kvartilius.
3) Įvertinkite komandos pasirodymus, lygindami vidurkius, dispersijas.

359. Pavaizduokite duomenis koordinačių plokštumoje taškais $(x; y)$. Nustatykite, ar tarp duomenų yra koreliacija. Jei yra, tai kokia?

a)

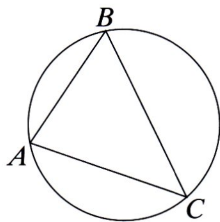
x	8	4	1	5	4	6	9	8	5	2	7	1
y	7	6	2	5	6	4	8	8	3	3	8	3

b)

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
y	28	25	24	24	16	10	12	5	−1	0

360. Styga apskritimą dalija į 2 dalis, kurių ilgių santykis yra:
a) 4 : 5; b) 5 : 7.
1) Kokie tų lankų ilgiai, jei apskritimo spindulys lygus 2 cm?
2) Kokiu kampu ši styga matoma iš apskritimo centro? Ar šio kampo dydis priklauso nuo apskritimo spindulio ilgio?

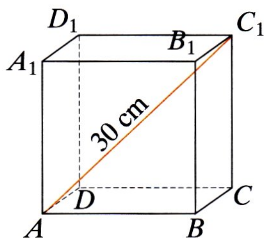
361. Apskaičiuokite įbrėžtinio trikampio kampų dydžius.



$\smile AB : \smile BC : \smile CA = 3 : 5 : 4$

$\angle A = ?$ $\angle B = ?$ $\angle C = ?$

362. Stačiakampio gretasienio įstrižainė lygi 30 cm, o jo ilgio, pločio ir aukščio santykis yra 2 : 1 : 2. Apskaičiuokite stačiakampio gretasienio viso paviršiaus plotą ir tūrį.



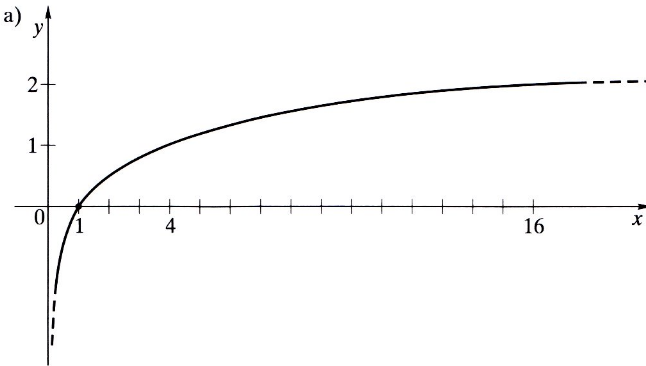
$AB : BC : BB_1 = 2 : 1 : 2$

8. Logaritmas

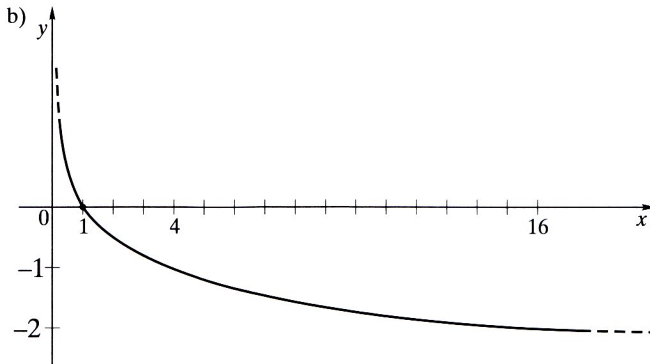
40. a) 3; b) −5; c) −6; d) −1; e) 0; f) 1.

41. a) $x \in (-1; +\infty)$; b) $x \in (0; +\infty)$; c) $x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$; d) $x \in (0; 3)$; e) $x \in (2; +\infty)$; f) $x \in \left(-2\frac{1}{3}; +\infty\right)$; g) $x \in (1; 2) \cup (2; +\infty)$; h) $x \in \boldsymbol{R}$; i) $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1; +\infty)$; j) $x \in (-2; 1) \cup (1; 2)$; k) $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0)$; l) $x \in (3; +\infty)$.

42. a)



b)



43. a) 1) 5; 2) $D_f = (0; +\infty)$, $E_f = \boldsymbol{R}$; $y = \log_5 x$ yra didėjanti funkcija; $y > 0$, kai $x \in (1; +\infty)$; $y < 0$, kai $x \in (0; 1)$; $y = 0$, kai $x = 1$;
b) 1) $\frac{1}{5}$; 2) $D_f = (0; +\infty)$, $E_f = \boldsymbol{R}$; $y = \log_{\frac{1}{5}} x$ yra mažėjanti funkcija; $y > 0$, kai $x \in (0; 1)$; $y < 0$, kai $x \in (1; +\infty)$; $y = 0$, kai $x = 1$;
c) 1) 3; 2) $D_f = (0; +\infty)$, $E_f = \boldsymbol{R}$; $y = \log_3 x$ yra didėjanti funkcija; $y > 0$, kai $x \in (1; +\infty)$; $y < 0$, kai $x \in (0; 1)$; $y = 0$, kai $x = 1$;
d) 1) 2; 2) $D_f = (0; +\infty)$, $E_f = \boldsymbol{R}$; $y = \log_{\sqrt{2}} x$ yra didėjanti funkcija; $y > 0$, kai $x \in (1; +\infty)$; $y < 0$, kai $x \in (0; 1)$; $y = 0$, kai $x = 1$.

44. a) 7; b) 5; c) $\frac{1}{10}$; d) $\frac{1}{10}$; e) 49; f) $\frac{1}{81}$.

45. a) 1) b; 2) $<, >, >, <, =, =$; b) 1) b; 2) $>, <, >, <, =, =$.

46. a) $(0; 1)$; $(1; +\infty)$; 1; b) $(0; 1)$; $(1; +\infty)$; 1.

47. a) 36; b) 18,5; c) $-\frac{1}{6}$; $\frac{1}{6}$; d) 2; e) 6; f) 6,5.
48. a) $x \in (0; 16)$; b) $x \in \left[\frac{1}{8}; +\infty\right)$; c) $x \in \left(\frac{1}{9}; +\infty\right)$; d) $x \in (0; 9]$; e) $x \in (0; 4)$;
f) $x \in (2{,}5; 7]$.
49. a) 2; b) $\frac{1}{2}$ ir 1.
50. a) 40π cm^2; b) $\frac{32\sqrt{5}}{3}\pi$ cm^3.
51. a) 1,5 mm; b) 9π mm^2.

9. Trigonometrinės funkcijos

93. 1) a) 120°; b) 960°; c) 3252°; 2) a) 10°; b) 80°; c) 271°;
3) a) $\frac{4}{3}\pi \approx 4{,}19$ cm, $\frac{\pi}{12} \approx 0{,}26$ cm; b) $\frac{32}{3}\pi \approx 33{,}51$ cm, $\frac{2\pi}{3} \approx 2{,}09$ cm;
c) $36\pi + \frac{2\pi}{15} \approx 113{,}46$ cm; $\frac{271\pi}{120} \approx 7{,}09$ cm;
4) a) $\frac{2\pi}{3} \approx 2$ rad, $\frac{\pi}{18} \approx 0{,}17$ rad; b) $\frac{16\pi}{3} \approx 17$ rad, $\frac{4\pi}{9} \approx 1{,}4$ rad;
c) $\frac{2\pi \cdot 3252}{360} = \frac{813\pi}{45} \approx 57$ rad, $\frac{2\pi \cdot 271}{360} = \frac{271\pi}{180} \approx 4{,}7$ rad.
94. a) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$; b) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; c) (0; 1); d) (−1; 0); e) $\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
96. a) 0 rad; $\frac{\pi}{12}$ rad; $-\frac{\pi}{6}$ rad; $-\frac{\pi}{4}$ rad; $\frac{\pi}{3}$ rad; b) 0°, 30°, 72°, ≈ 57°, ≈ 573°.
98. a) 45°; b) 90°; c) $AC = 4$ cm, $AB = 2\sqrt{3}$ cm; d) $P_{ABCD} = 4\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 2$ cm.

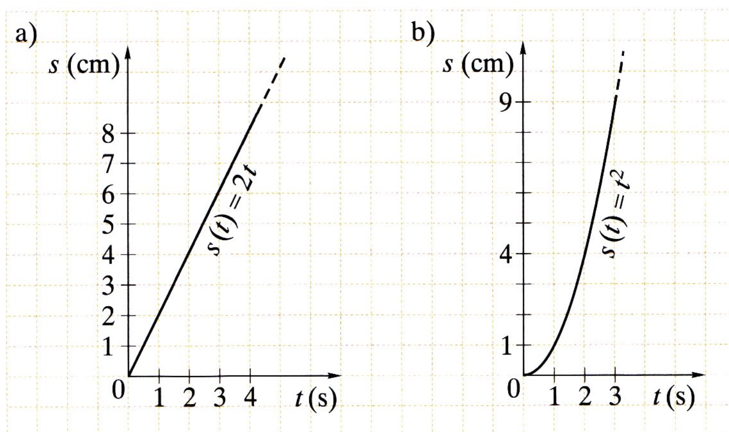
10. Trigonometrijos taikymai

138. a) $\sin\alpha \approx 0{,}227$ (I ketvirtis), $\sin\alpha \approx -0{,}227$ (IV ketvirtis);
b) $\cos\alpha \approx 0{,}927$ (I ketvirtis), $\cos\alpha \approx -0{,}927$ (II ketvirtis);
c) $\cos\alpha \approx 0{,}985$ (I ketvirtis), $\cos\alpha \approx -0{,}985$ (III ketvirtis);
d) $\operatorname{tg}\alpha \approx 0{,}839$ (I ketvirtis).
139. $\frac{1}{\cos^2\alpha}$; b) $-2\sin\alpha\cos\alpha (= -\sin 2\alpha)$.
140. a) $x_1 = 2\pi$, $x_2 = 3\pi$, $x_3 = 4\pi$; b) $x_1 = -\frac{\pi}{3}$, $x_2 = \frac{\pi}{3}$; c) $x = \frac{5\pi}{4}$.
141. a) $x = (-1)^k \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right) + k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$ (arba $x = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$);
b) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$; c) $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$.
142. a) 0; b) $-\frac{\pi}{6}$; c) 0; d) $\frac{3\pi}{4}$; e) 0; f) $-\frac{\pi}{4}$.
143. a) $a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; b) $a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$;
c) $a \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$; d) $a \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$.
144. a) $BC = \sqrt{13}$ cm, $\angle B = \operatorname{arctg}\frac{2}{3} \approx 34°$, $\angle C \approx 56°$;
b) $AB = 4$, $\angle B = \arcsin 0{,}6 \approx 37°$, $\angle C \approx 53°$;
c) $AC = 3$, $AB = 3\sqrt{3}$, $\angle C \approx 60°$;
d) $BC = 2$, $AC = \sqrt{3}$, $\angle C \approx 30°$;
e) $AB = 5\cos 40° \approx 3{,}8$ (cm), $BC = 5\sin 40° \approx 3{,}2$ (cm), $\angle C = 50°$;
f) $AC = \frac{2}{\cos 50°} \approx 3{,}1$, $BC = 2\operatorname{tg} 50° \approx 2{,}4$, $\angle C \approx 40°$;
g) $\angle A = \angle C = 45°$, $AB = BC = 2\sqrt{2}$.
145. a) $BC = 2\sqrt{3}$ cm, $\angle C = 90°$, $\angle B = 30°$; b) $\angle C \approx 23°$, $\angle A \approx 77°$, $AC \approx 5{,}1$;
c) $AC \approx 6{,}7$, $BC \approx 3{,}2$, $\angle C = 25°$; d) $\angle C = 10°$, $AB = AC \approx 6{,}1$.

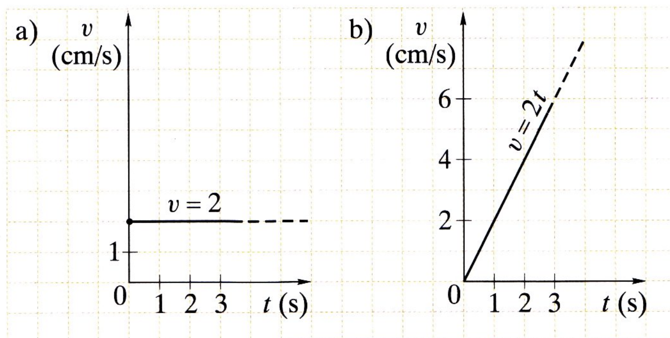
146. a) 5 cm^2; b) 3; c) 3; d) 2,5; e) ≈ 5; f) $3\sqrt{2}$.
147. a) 0,05, $\approx 3°$; b) 0,1, $\approx 6°$.
148. $250 \operatorname{tg} 3° \approx 13$ m.

11. Funkcijos išvestinė

184. 1)



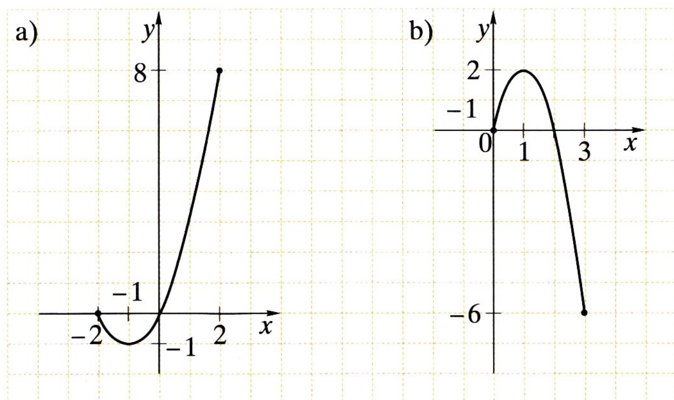
2) a) tolygiai; b) su pagreičiu.
3)



4) a) $v(1) = v(2) = v(10) = 2$ cm/s;
b) $v(1) = 2$ cm/s, $v(2) = 4$ cm/s, $v(10) = 20$ cm/s.
5) a) $s'(t) = 2$; $s'(1) = s'(2) = s'(10) = 2$;
b) $s'(t) = 2t$; $s'(1) = 2$, $s'(2) = 4$, $s'(10) = 20$.
185. a) $f'(x) = 1$; b) $f'(x) = -1$; c) $f'(x) = -\frac{1}{3}$; d) $f'(x) = \sqrt{3}$; e) $f'(x) = 2x$; f) $f'(x) = -2x$; g) $f'(x) = -x$; h) $f'(x) = 2\sqrt{3}x$; i) $f'(x) = x^{\sqrt{2}-1}$.
186. a) $x = \frac{1}{4}$; b) $x_1 = -3\frac{1}{3}$, $x_2 = 0$.
187. a) $f'(1) = 5$; b) $f'(1) = 1$.
188. 1) Statusis; 2) 54 cm^2; 3) 3 cm; 4) $EB = 3$ cm, $CF = 9$ cm, $AG = 6$ cm.
189. a) Taip; b) ne.
190. $CD = 20$, $AD = 10$.

213. a) $x \in (-\infty; -3) \cup (-1; +\infty)$ — išvestinė teigiama, funkcija didėjanti;
$x \in (-3; -1)$ — išvestinė neigiama, funkcija mažėjanti;
b) $x \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$ — išvestinė teigiama, funkcija didėjanti;
$x \in (2; 3)$ — išvestinė neigiama, funkcija mažėjanti;
c) $x \in (-\infty; +\infty)$ — išvestinė teigiama, funkcija didėjanti;
d) $x \in (-\infty; +\infty)$ — išvestinė neigiama, funkcija mažėjanti;
e) $x \in (-\infty; +\infty)$ — išvestinė lygi 0, funkcija yra pastovi.
214. a) $f'(x) = 5$; funkcija yra didėjanti su visomis x reikšmėmis;
ekstremumo taškų ir ekstremumų nėra;
b) $f'(x) = -3$; funkcija yra mažėjanti su visomis x reikšmėmis;
ekstremumo taškų ir ekstremumų nėra;
c) $f'(x) = 2x + 2$; kai $x \in (-1; +\infty)$, tai funkcija didėjanti,
kai $x \in (-\infty; -1)$, tai funkcija mažėjanti;
$x = -1$ — minimumo taškas, $f(-1) = -1$ — minimumas;
d) $f'(x) = -4x - 5$; kai $x \in \left(-\infty; -\frac{5}{4}\right)$, tai funkcija didėjanti,
kai $x \in \left(-\frac{5}{4}; +\infty\right)$, tai funkcija mažėjanti;
$x = -\frac{5}{4}$ — maksimumo taškas, $f\left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{25}{8}$ — maksimumas;
e) $f'(x) = x$; kai $x \in (0; +\infty)$, tai funkcija didėjanti,
kai $x \in (-\infty; 0)$, tai funkcija mažėjanti;
$x = 0$ — minimumo taškas, $f(0) = \frac{1}{2}$ — minimumas;
f) $f'(x) = -\frac{3}{2}x$; kai $x \in (-\infty; 0)$, tai funkcija didėjanti,
kai $x \in (0; +\infty)$, tai funkcija mažėjanti;
$x = 0$ — maksimumo taškas, $f(0) = -\frac{3}{4}$ — maksimumas;
g) $f'(x) = 10x + 1$; kai $x \in \left(-\frac{1}{10}; +\infty\right)$, tai funkcija didėjanti,
kai $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{10}\right)$, tai funkcija mažėjanti;
$x = -\frac{1}{10}$ — minimumo taškas, $f\left(-\frac{1}{10}\right) = \frac{19}{20}$ — minimumas;
h) $f'(x) = -2x - 1$; kai $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$, tai funkcija didėjanti,
kai $x \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$, tai funkcija mažėjanti;
$x = -\frac{1}{2}$ — maksimumo taškas, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}$ — maksimumas;
i) $f'(x) = 9x^2 + 4x$; kai $x \in \left(-\infty; -\frac{4}{9}\right) \cup (0; +\infty)$, tai funkcija didėjanti,
kai $x \in \left(-\frac{4}{9}; 0\right)$, tai funkcija mažėjanti;
$x = -\frac{4}{9}$ — maksimumo taškas, $f\left(-\frac{4}{9}\right) = \frac{32}{243}$ — maksimumas,
$x = 0$ — minimumo taškas, $f(0) = 0$ — minimumas;
j) $f'(x) = x^2 - 2x + 1$; kai $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$, tai funkcija didėjanti;
ekstremumo taškų ir ektremumų nėra.
215. a) $100\,\text{cm}^2$;
b) $10\,\text{cm} \times 10\,\text{cm}$.
216. a) $100 = 50 + 50$; 2500;
b) $100 = 50 + 50$; 5000.

217.



$\max\limits_{x\in[-2;2]}(x^2+2x)=8$, kai $x=2$; $\max\limits_{x\in[0;3]}(-2x^2+4x)=2$, kai $x=1$;

$\min\limits_{x\in[-2;2]}(x^2+2x)=-1$, kai $x=-1$; $\min\limits_{x\in[0;3]}(-2x^2+4x)=-6$, kai $x=3$.

218. a) 1) $D_f=[-9;7]$, $E_f=[-6;8]$;

2) -6; 1 — ekstremumo taškai; -6 — minimumo taškas,

1 — maksimumo taškas; 0 — minimumas, 8 — maksimumas;

3) $x\in(-6;1)$ — funkcija yra didėjanti,

$x\in(-9;-6)\cup(1;7)$ — funkcija yra mažėjanti, $f'(x)>0$, kai $x\in(-6;1)$,

$f'(x)<0$, kai $x\in(-9;-6)\cup(1;7)$;

$f(x)>0$, kai $x\in[-9;-6)\cup(-6;4)$,

$f(x)<0$, kai $x\in(4;7]$;

4) $f'(x)=0$, kai $x=-6$ ir kai $x=1$;

5) $\max\limits_{[-9;7]}f(x)=8$, kai $x=1$, $\min\limits_{[-9;7]}f(x)=-6$, kai $x=7$;

b) 1) $D_f=[-9;2]$, $E_f=[-4;2]$;

2) -5; -3; -1 — ekstremumo taškai, -3 — minimumo taškas,

-5; -1 — maksimumo taškai, 0 — minimumas, 2 — maksimumas;

3) $x\in(-9;-5)\cup(-3;-1)$ — funkcija didėjanti;

$x\in(-5;-3)\cup(-1;2)$ — funkcija mažėjanti;

$f'(x)>0$, kai $x\in(-9;-5)\cup(-3;-1)$;

$f'(x)<0$, kai $x\in(-5;-3)\cup(-1;2)$;

$f(x)>0$, kai $x\in(-7;-3)\cup(-3;1)$;

$f(x)<0$, kai $x\in[-9;-7)\cup(1;2]$;

4) $f'(x)=0$, kai $x=-5$, kai $x=-3$ ir kai $x=-1$;

5) $\max\limits_{[-9;2]}f(x)=2$, kai $x=-5$ ir kai $x=-1$;

$\min\limits_{[-9;2]}f(x)=-4$, kai $x=-9$ ir kai $x=2$.

219. a) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ mm; b) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ mm; c) $\frac{50\sqrt{3}}{3}$ mm^2.

13. Tikimybės

305. a) $\frac{3}{5}$; b) $\frac{2}{5}$.

306. 25, 26, 28, 52, 56, 58, 62, 65, 68, 82, 85, 86; $\mathbf{P}(A) = \frac{3}{4}$, $\mathbf{P}(B) = \frac{1}{4}$, $\mathbf{P}(C) = 0$.

307. a) 20; b) 6; c) 10.

308. $\mathbf{P}(C \text{ ir } D) = \frac{1}{6}$.

309. $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{36}$, $\mathbf{P}(B) = \frac{1}{4}$.

310. $\mathbf{P}(A \text{ arba } B) = 0{,}92$.

311. a) $\frac{2}{5}$; b) $\frac{17}{20}$; c) $\frac{17}{20}$.

312. 30°.

313. a) 3 km 200 m; b) 60 ha.

14. Statistika

336. Populiacija: a) Lietuvos aštuntokai;

b) Lietuvos valstybinių mokyklų mokytojai;

c) Vilniaus gyventojai.

Imtis: a) dalis Lietuvos aštuntokų;

b) dalis Lietuvos valstybinių mokyklų mokytojų;

c) dalis Vilniaus gyventojų.

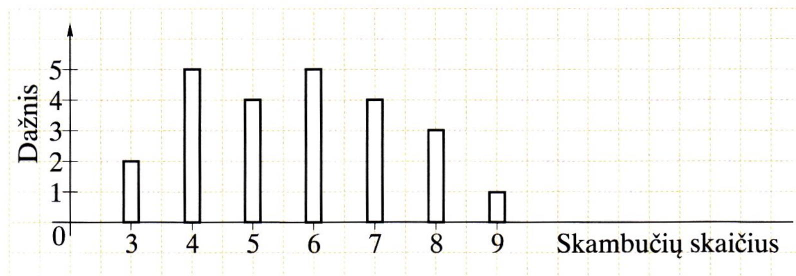
337. Pavyzdžiui, į imtį pateks tie nariai, kurių numeriai yra:

a) 66, 10, 292, 43, 25, 158, 260, 91, 52, 111, 40, 106, 69, 131, 36, 287, 46, 195, 123, 63;

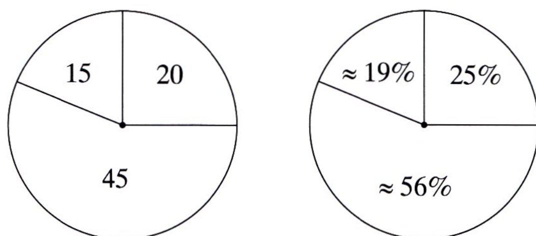
b) 116, 32, 182, 152, 113, 124, 55, 201, 263, 294, 80, 62, 8, 172, 197, 299, 36, 151, 217, 149, 239, 155, 279, 7, 19, 227, 95, 261, 82, 71.

338.

Skambučių skaičius (per dieną)	3	4	5	6	7	8	9
Dienų skaičius (dažnis)	2	5	4	5	4	3	1
Santykinis dažnis	$\frac{2}{24}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{4}{24}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{4}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{1}{24}$

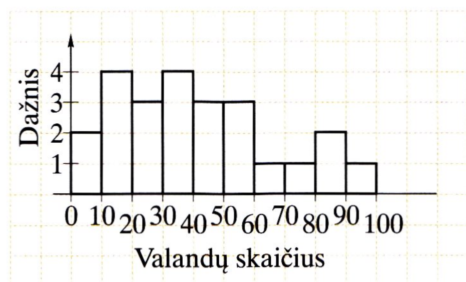


353.



354.

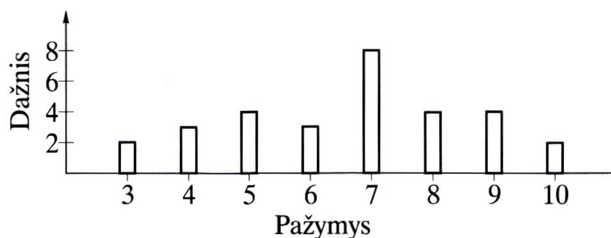
Intervalas	[0; 10)	[10; 20)	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50)	[50; 60)	[60; 70)	[70; 80)	[80; 90)	[90; 100)
Dažnis	2	4	3	4	3	3	1	1	2	1



355. ≈ 53.

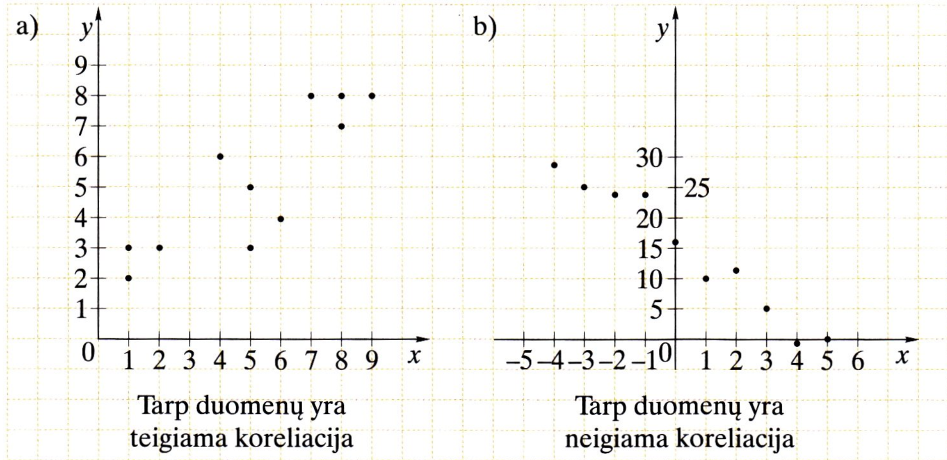
356. a) $\bar{x} = 6$, $s^2 \approx 4{,}615$, $M_o = 4$, $M_o = 6$, $M_o = 8$, $M_d = 6$, $Q_1 = 4$; $Q_3 = 8$;
b) $\bar{x} = 45{,}2$, $s^2 \approx 65{,}51$, $M_o = 36$, $M_d = 45{,}5$, $Q_1 = 38$, $Q_3 = 48$.

357. $\bar{x} \approx 6{,}67$, $s^2 \approx 3{,}885$, $M_o = 7$, $M_d = 7$, $Q_1 = 5$, $Q_3 = 8$.



358. 1) I komanda: $\bar{x} \approx 74{,}3$, $s^2 \approx 35{,}88$;
II komanda: $\bar{x} \approx 68$, $s^2 \approx 484{,}36$;
2) I komanda: imtis modos neturi, $M_d = 75{,}5$, $Q_1 = 69$, $Q_3 = 79{,}5$;
II komanda: $M_o = 86$, $M_d = 67$, $Q_1 = 50{,}5$, $Q_3 = 86$;
3) I komanda vidutiniškai surinko daugiau taškų negu antra. I komandos duomenys yra mažiau išsibarstę apie vidurkį negu antros.

359.



360. a) 1) $\frac{16\pi}{9}$ cm, $\frac{20\pi}{9}$ cm; 2) 160°, ne;
b) 1) $\frac{5\pi}{3}$ cm, $\frac{7\pi}{3}$ cm; 2) 150°, ne.
361. $\angle A = 75°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 45°$.
362. $S = 1600\,\text{cm}^2$, $V = 4000\,\text{cm}^3$.

Atsitiktinių skaičių lentelė

75421	11182	31304	08036	86922	77941	88944	30226	60766	90951
06692	19591	14171	04356	06744	46546	99184	97684	43285	86345
66065	12379	70386	09035	90126	74677	39885	84335	09442	21772
01098	06343	88773	94702	07203	60936	54445	12423	64560	99694
93526	56837	42025	45578	95193	97695	53146	51370	79913	83145
85129	31088	36253	40011	62078	72245	58783	47555	55681	45450
74312	81501	94303	30800	60660	69979	57625	00050	69795	15120
67348	11345	13361	40573	75687	78415	42407	97830	98069	98605
29241	77892	67728	60876	53046	75840	18933	18108	73509	76958
04366	94984	95131	22993	17240	63185	54786	31607	50705	61581
54205	61584	99698	74013	88263	96563	18003	77390	05762	40975
52801	44366	19745	74219	20982	91400	50685	56541	68392	96624
02573	59494	26362	40769	39340	19677	16923	04761	65952	03630
15896	32426	64984	99029	58073	28814	44849	39871	00825	29966
26032	33340	54573	55786	75383	14546	37499	43894	86358	19706
41349	18921	50835	65861	79521	38319	33999	74851	97319	17221
31246	35797	89051	36319	38137	11101	02808	36771	63163	00816
55704	87671	81967	18984	94617	89097	91625	49172	07106	06218
09107	53117	75664	25300	98186	29702	73632	77044	08238	08097
53779	05917	99367	58743	33981	66547	45685	11168	81086	29458
05252	99475	70537	29636	46984	49231	73571	64092	26162	26361
92966	81458	79792	39399	39278	20247	45367	76937	64563	73930
68109	88529	70116	11782	24198	68334	83184	26202	49315	38471
53118	70359	68973	95173	29213	29969	00445	24846	50957	80443
60924	44136	71034	80642	62977	93957	21006	66422	96753	69814
11151	59784	77446	64703	22038	40357	57749	62349	88018	20160
32731	14203	36222	13436	16935	26412	09878	27931	54679	35275
04037	48341	95595	26036	57521	16245	71204	44232	09527	49083
75807	89169	30622	23911	73689	50718	33796	30145	97763	75437
93509	65893	82351	54938	26829	04823	71697	46159	43465	99159
93528	38008	53069	29029	36617	09019	95758	52955	75018	83253
10603	93078	11673	36373	71957	89710	15378	52022	57934	86236
99155	30214	58351	16606	08569	19665	22531	58753	22759	90501
97268	87653	40124	51615	27365	26827	70255	23368	78952	05515
93564	66965	91850	25093	53517	39997	17521	57074	76743	11610
06959	27612	66188	19351	17367	84340	00247	49881	01997	33756
13172	61241	53558	59919	15082	75692	43138	22677	55844	70034
03690	57173	38889	03032	69496	42566	23096	43416	78732	12420
38005	70085	74744	32644	88440	12489	39538	64712	92792	51310
28758	45596	59049	79799	68763	49827	57854	76334	99237	11388
84260	58136	31250	88953	04929	06903	21175	42463	15227	15205
77800	77252	68397	37935	53941	59771	92875	37004	57044	18210
99505	24764	22807	54083	90303	43362	71223	96233	88058	03268
53803	68932	38510	87838	68543	73671	57403	50077	63351	55781
68379	47885	33501	10666	74222	81999	16699	51745	84672	11640
30033	45809	69655	31679	56931	40579	53867	22586	00794	67305
73888	69685	91050	60898	06171	01165	04192	03700	27979	76516
50935	51867	76172	52543	38383	43396	67725	68868	15571	78654
04689	09839	31801	18560	21328	87664	08203	82426	23946	82792
65860	84568	88383	49927	52267	63736	01964	86914	14949	55467

TRIGONOMETRINIŲ FUNKCIJŲ REIKŠMIŲ LENTELĖ

Laipsniai	sin	tg	cos	Laipsniai	sin	tg	cos
0	0,000	0,000	1,000				
1	017	017	1,000	46	0,719	1,036	0,695
2	035	035	0,999	47	731	072	682
3	052	052	999	48	743	111	669
4	070	070	998	49	755	150	656
5	0,087	0,087	0,996	50	0,766	1,192	0,643
6	105	105	995	51	777	235	629
7	122	123	993	52	788	280	616
8	139	141	990	53	799	327	602
9	156	158	988	54	809	376	588
10	0,174	0,176	0,985	55	0,819	1,428	0,574
11	191	194	982	56	829	483	559
12	208	213	978	57	839	540	545
13	225	231	974	58	848	600	530
14	242	249	970	59	857	664	515
15	0,259	0,268	0,966	60	0,866	1,732	0,500
16	276	287	961	61	875	804	485
17	292	306	956	62	883	881	469
18	309	325	951	63	891	1,963	454
19	326	344	946	64	899	2,050	438
20	0,342	0,364	0,940	65	0,906	2,145	0,423
21	358	384	934	66	914	246	407
22	375	404	927	67	921	356	391
23	391	424	921	68	927	475	375
24	407	445	914	69	934	605	358
25	0,423	0,466	0,906	70	0,940	2,747	0,342
26	438	488	899	71	946	2,904	326
27	454	510	891	72	951	3,078	309
28	469	532	883	73	956	271	292
29	485	554	875	74	961	487	276
30	0,500	0,577	0,866	75	0,966	3,732	0,259
31	515	601	857	76	970	4,011	242
32	530	625	848	77	974	4,331	225
33	545	649	839	78	978	4,705	208
34	559	675	829	79	982	5,145	191
35	0,574	0,700	0,819	80	0,985	5,671	0,174
36	588	727	809	81	988	6,314	156
37	602	754	799	82	990	7,115	139
38	616	781	788	83	993	8,144	122
39	629	810	777	84	995	9,514	105
40	0,643	0,839	0,766	85	0,996	11,430	0,087
41	656	869	755	86	998	14,301	070
42	669	900	743	87	999	19,081	052
43	682	933	731	88	999	28,636	032
44	695	966	719	89	1,000	57,290	017
45	0,707	1,000	0,707	90	1,000	∞	0,000


ISBN 9955-680-04-0
9 789955 680048